ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LONGITUD DE UNA CURVA PARAMÉTRICA.

Dados dos puntos $P_1 = (x_1, x_2, ..., x_n), P_2 = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ (pensemos en puntos del espacio, de $\mathbb{R}^3$) sabemos calcular la distancia que los separa

$$||P_1 - P_2|| = \sqrt{< P_1 - P_2, P_1 - P_2 >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

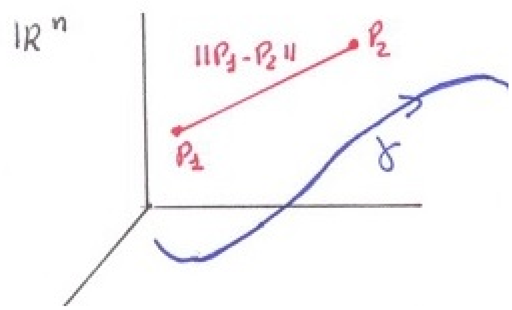

FIGURA 1. Distancia entre dos puntos.

Sabemos medir la **longitud** del segmento que los une. ¿Como medimos la **longitud** de una curva γ? Para dar respuesta a esta pregunta usaremos lo que ya conocemos sobre medir segmentos.

En primer lugar recordemos lo que es una curva paramétrica.

Curvas Paramétricas. Una curva paramétrica es una aplicación

$$\begin{array}{rcccccl} \gamma & : & [a,b] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n & & \\ & & t & \to & \gamma(t) & = & (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \end{array}$$

donde las funciones $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas en $t \in [a, b]$ para $k = 1, 2, .., n$. La imagen de γ es un subconjuto de $\mathbb{R}^n$ que es lo que reconocemos como *curva*.

Volvamos al problema de medir la **longitud de la curva.** Para ello tomamos una partición del intevalo $[a, b]$

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{m-1} < t_m = b\}$$

(ver la definición de la Integral de Riemann) y consideramos los puntos sobre ls curva γ :

$$\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_{m-1}), \gamma(t_m).$$

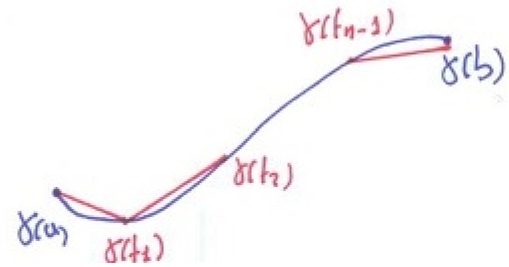

FIGURA 2. Poligonal sobre una curva.

Podemos medir la **poligonal** dada por los puntos anteriores

$$S(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{m} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||.$$

La propiedad **triangular** de la norma ($||\cdot||$, equivalente a la del valor absoluto que estudiamos sobre el cuerpo de números $\mathbb{R}$) nos dice que si P' es una partición más fina que P, entonces

$$S(\gamma, P) \leq S(\gamma, P').$$

En vista de lo cuál tenemos la siguiente definición.

Definición. 1. *Se dice que una curva paramétrica γ es **rectificable** (es decir, que tiene **longitud** finita) si existe*

$$\sup\{\, S(\gamma, P) \ : \ P \in P([a, b])\,\}.$$

*Al número anterior, si existe, lo llamamos **longitud** de la curva γ (Escribimos: longγ).*

Ya tenemos una definición de lontidud de una curva cualquiera, aproximar por una poligonal y pasar al límite. No debemos esperar que todas las curvas tengan una longitud finita.

Ejemplo. 1. *Se considera la curva plana (en $\mathbb{R}^2$) paramétrica*

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & & r & \to & \gamma(r) & = & (r\cos\frac{1}{r}, r\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{r}), \qquad si \qquad r \neq 0 \end{array}$$

y $\gamma(0) = (0,0)$. Veamos que aunque la curva está acotada, su longitud es infinita.

Demostración: Tomando límites, es fácil ver que es una curva continua. Además con un poco de trabajo vemos que es una espiral.

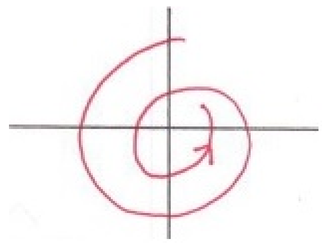

FIGURA 3. Espiral.

Ahora consideramos la partición

$$P_n = \{0 < \frac{1}{2n\pi} < \frac{1}{(2n-1)\pi} < \frac{1}{(2n-2)\pi} < .... < \frac{1}{3\pi} < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1\}$$

y calculamos la longitud de la poligonal asociada (usamos que $\frac{1}{i\pi}\operatorname{sen} i\pi = 0$)

$$S(\gamma, P_n) = \sum_{i=1}^{2n} ||\gamma(\frac{1}{i\pi}) - \gamma(\frac{1}{(i-1)\pi})|| \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2j\pi} + \frac{1}{(2j-1)\pi}$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \to_{n\to\infty} \infty,$$

dado que la serie **armónica** no es convergente. Por tanto esta curva no es rectificable, **no** tiene longitud finita. $\square$

La integral nos va ayudar a carlular longitudes, como lo hace para calcular áreas.

Teorema. 1. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica de modo que existe γ' y es continua en todo $[a,b]$, entonces la curva γ es* ***rectificable*** *y se verifica que*

$$long\,\gamma = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt.$$

Para la noción de derivada de una curva ver el Apéndice Derivadas de Funciones de Varias Variables.

Demostración: Veamos el esquema de la demostración de este resultado.

Supondremos que

$$\gamma(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \quad \text{para} \quad t \in [a,b];$$

donde cada f_k es una función derivable con derivada continua sobre $[a,b]$ para todo $k = 1, 2, ..., n$. Si P es una partición del intervalo $[a,b]$, entonces

$$S(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{m} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||$$

usando la definición de norma en $\mathbb{R}^n$ vista arriba

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\, f_k(t_i) - f_k(t_{i-1})\,)^2}$$

usando el Teorema del Valor Medio para cada f_k

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\, f_k'(t_{k,i})(t_i - t_{i-1})\,)^2} \simeq \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (f_k'(t_i)^2 (t_i - t_{i-1})}$$

ya que $t_{k,i} \in [t_{i-1}, t_i]$ y f_k' es continua, así

$$= \sum_{i=1}^{m} ||\gamma'(t_i)||(t_i - t_{i-1}) \rightarrow_{m\rightarrow\infty} \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$

por la caracterización de la integral de Riemann para funciones continuas. $\square$

Observación. 1. *Sea $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de una variable con derivada continua sobre $[a,b]$. Entonces*

- *una parametrización de la $Graff$ es $\gamma(x) = (\, x, f(x)\,)$ para $x \in [a,b]$;*
- *así $\gamma'(x) = (1, f'(x))$ y $||\gamma'(t)|| = \sqrt{1 + (f')^2(x)}$;*
- *por tanto $longGraff = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx$, la fórmula que hemos dado para longitudes de gráficas en el artículo Longitudes, Áreas y Volúmenes.*

Parámetro Longitud de Arco . Supongamos que la curva $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene derivada continua γ'. Entonces la función

$$L(x) = \int_a^x ||\gamma'(t)||dt$$

mide la longitud de la curva desde su inicio en el punto $\gamma(a)$ hasta el punto $\gamma(x)$ (en particular $L(a) = 0$ y $L(b) = \text{long}\gamma$). Como la función $||\gamma'|| \geq 0$, la función L es estrictamente creciente y por tanto inyectiva, así existe su inversa

$$L^{-1} : [0, \text{long}\gamma] \rightarrow [a,b]$$

Si consideramos ahora la curva paramétrica

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\gamma} & : & [0, \text{long}\gamma] & \rightarrow & \mathbb{R}^n & & \\ & & x & \rightarrow & \overline{\gamma}(s) & = & \gamma \circ L^{-1}(s), \end{array}$$

entonces $\mathrm{Im}\,\overline{\gamma} = \mathrm{Im}\gamma$ (es decir, estamos ante la misma curva de $\mathbb{R}^n$, dada por dos parametrizaciones distintas). Además

$$\int_0^s ||\overline{\gamma}'(t)||dt = s$$

(es decir el parámetro s nos da de entrada la longitud de la curva desde su inicio $\overline{\gamma(0)} = \gamma(a)$ hasta el punto correspondiente $\overline{\gamma}(s)$.

Demostración:

$$\overline{\gamma}\,'(t) = (\gamma \circ L^{-1})'(t)$$

por la Regla de la Cadena

$$= \gamma\,'(L^{-1}(t))(L^{-1})'(t)$$

y por los Teoremas de la Función Inversa y Fundamental del Cálculo

$$= \gamma'(L^{-1}(t))\frac{1}{L'(L^{-1}(t))} = \gamma'(L^{-1}(t))\frac{1}{||\gamma\,'(L^{-1}(t))||}.$$

Luego

$$\int_0^s ||\overline{\gamma}\,'(t)||dt = \int_0^s ||\gamma'(L^{-1}(t))\frac{1}{||\gamma\,'(L^{-1}(t))||}||dt$$
$$= \int_0^s ||\gamma'(L^{-1}(t))||\frac{1}{||\gamma\,'(L^{-1}(t))||}dt = \int_0^s 1ds = s$$

□

En algunos cálculos es conveniente tener una curva dada parametrizada respecto del parámetro longitud de arco.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es