ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua en el intervalo $[-1,1]$. Su gráfica como vimos es la semicircunferencia de radio uno y centro el origen de coordenadas.

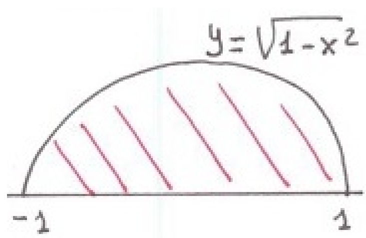

Figura 1. Círculo unidad.

Por ello la siguiente definición tiene sentido.

Definición. 1. *Llamamos número π (pi) al valor de la integral*

$$\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx.$$

Además la circunferencia de radio uno nos ayuda a dar la definición de ángulo entre vectores; medido este ángulo en **radianes**. Dado un vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ su distancia al origen $(0,0)$ la medimos por

$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}>} = \sqrt{v_1^2+v_2^2}.$$

Así el vector

$$\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} = (\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}) \in \text{Graf}f,$$

es decir, cae sobre la circunferencia de radio 1. Con esto podemos dar la siguiente definición.

Definición. 2. *Dados dos vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ llamamos ángulo entre ambos a la longitud del arco de circunferencia entre $\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$ y $\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$: θ.*

Por simplicidad no entramos en el problema de la orientación del ángulo.

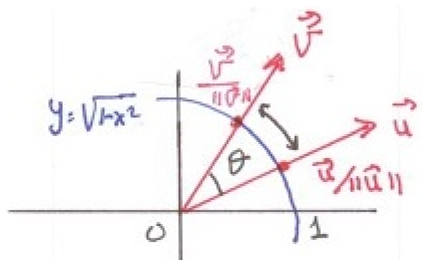

Figura 2. Ángulo entre dos vectores.

Dado un ángulo θ, si llevamos esta longitud desde el punto $(1,0)$ a lo largo de la gráfica de f llegaremos a un punto $(x, \sqrt{1-x^2})$ de esta gráfica. La forma geométrica de definir el coseno y el seno del ángulo es

$$\cos\theta = x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2}.$$

(Ver Apéndice preliminar sobre Trigonometría). Ahora, disponiendo de la integral, vamos a dar una definición más precisa de estas funciones.

En el artículo sobre Longitudes, Áreas y Volúmenes vimos lo siguiente.

Ejercicio. 1. *Consideramos la semicircunferncia de radio la unidad* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. *Fijamos un punto sobre la gráfica* $(x,y) = (x, \sqrt{1-x^2})$. *Este punto determina un sector circular. Lo que vamos a probar es que el área del sector circular es la mitad que la longitud del arco del sector:* θ.

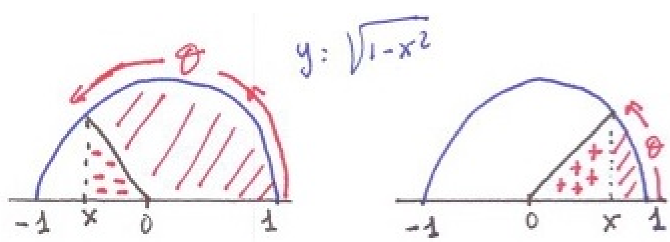

Figura 3. Sector circular.

Demostración: Sea $A(x)$ el área del sector circular determinado por los puntos: $(0,0), (1,0)$ y $(x, \sqrt{1-x^2})$. Así

$$A(x) = \int_x^1 \sqrt{1-s^2}ds + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

El segundo sumando es el área de un triángulo que suma si $x > 0$ y que resta en otro caso.

Sea $\theta(x)$ la longitud del arco del sector de arriba. Así aplicando la fórmula de la longitud de una gráfica (ver artículo anterior)

$$\theta(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds$$

(según hemos visto al calcular al longitud de la semicircunferencia en el artículo Longitudes, Áreas y Volúmenes).

Lo que queremos probar es que

$$2A(x) = \theta(x) \quad \text{para todo} \quad x \in [-1, 1].$$

Consideramos la función $H(x) = 2A(x) - \theta(x)$. Es claro que $H(1) = 0$. Y que es continua en $[-1, 1]$ (ejercicio).

Por otra parte, usando el Teorema Fudamental del Cálculo

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2A'(x) - \theta'(x) \\ &= -2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Como su derivada es nula, H es constante. Además $H(0) = 0$, así vemos que es una función nula

□

Este resultado nos pone en relación el ángulo θ con la x que por geometría sabemos que se corresponde con su coseno.

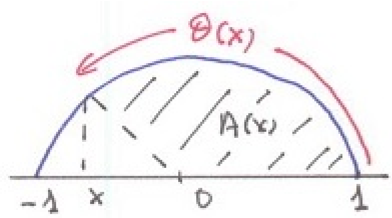

Figura 4. Relación entre ángulo y coordenadas.

Definición. 3. *Se define la función $B(x) = 2A(x)$ para $x \in [-1, 1]$*

Observación. 1. *Por el resultado anterior*

$$B(x) = 2A(x) = \theta(x).$$

Luego lo que estamos diciendo es que nuestra función B va a ser la inversa de la función coseno.

Gráfica de B. $B(x) = 2A(x)$ para $x \in [-1, 1]$. Así de los cálculos anteriores:

- $B(x) \geq 0$.
- $B'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ para todo $x \in (-1, 1)$. Luego B es decreciente.
- $B(-1) = 2A(x) = \pi$, por la definición de este número dada al principio del artículo.
- $B(0) = 2A(x) = \frac{\pi}{2}$, por la definición de π y la simetría de la función A (Ejerccio: hacer el cálculo)
- $B(1) = 2A(1) = 0$.
- Calculando su derivada segunda

$$B''(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ < 0, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Luego es convexa en $[-1, 0]$ y concava en el resto. La gráfica de B es

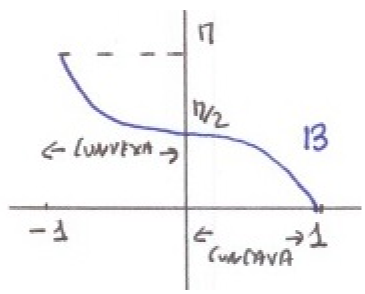

FIGURA 5. Gráfica de B.

B es una función decreciente y por tanto inyectiva. Tiene sentido, por tanto, la siguiente definición.

Definición. 4. **a:** *Si* $\theta \in [0, \pi]$, $\cos\theta$ *es el único* $x \in [-1, 1]$ *con* $B(x) = \theta$. *(Es decir,* $\cos\theta = B^{-1}(\theta)$ *).*

b: *Si* $\theta \in [0, \pi]$, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$.

Observación. 2. *De la definición anterior se tiene que*

- *Para todo* $\theta \in [0, \pi]$ *se tiene que* $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.
- *Como B es continua y derivable con* $B'(x) \neq 0$, *se sigue que su inversa* $\cos x$ *es continua y derivable con*

$$\cos'\theta = \frac{1}{B'(\cos\theta)} = -\sqrt{1 - \cos^2\theta} = -\operatorname{sen}\theta,$$

donde hemos usado el Teorema de la Función Inversa y la definición del $\operatorname{sen}\theta$.

- *Por ser* $\cos\theta$ *continua y derivable, lo mismo le ocurre al* $\operatorname{sen}\theta$ *y derivando*
$$\operatorname{sen}'\theta = \frac{1}{2\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-2\cos\theta(-\operatorname{sen}\theta)) = \cos\theta.$$
- *Es fácil ver que en* $\theta = 0$ *y* π *las funciones seno y coseno son continuas y derivables con* $\cos'(0) = \cos'\pi = 0$ *y* $\operatorname{sen}'(0) = 1$ *y* $\operatorname{sen}'\pi = -1$

Lo que acabamos de ver son las propiedades usuales del coseno y del seno (incluidas las reglas de derivación que dejamos pendientes de prueba en su momento).

¿Cómo se definen las funciones seno y coseno en toda la recta?

Definición. 5. **a:** *Si* $\theta \in [\pi, 2\pi]$, *se define* $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$
b: *Si* $\theta = 2\pi k + \theta'$ *con* $k \in \mathbb{Z}$ *y* $\theta' \in [0, 2\pi]$, *se define* $\cos\theta = \cos\theta'$

Así con un poco de trabajo y teniendo en cuenta la gráfica de la función B nos sale que

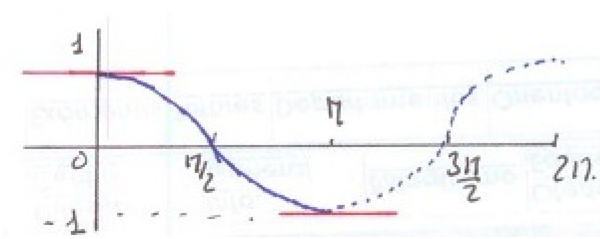

Figura 6. Gráfica del coseno.

Definición. 6. **a:** *Si* $\theta \in [\pi, 2\pi]$, *se define* $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(2\pi - \theta)$
b: *Si* $\theta = 2\pi k + \theta'$ *con* $k \in \mathbb{Z}$ *y* $\theta' \in [0, 2\pi]$, *se define* $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta'$

Así con un poco de trabajo y teniendo en cuenta la gráfica de la función B nos sale que

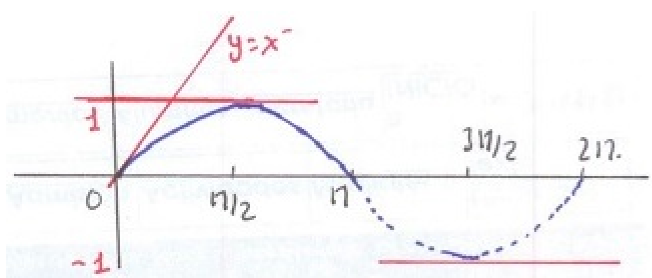

Figura 7. Gráfica del seno.

Observación. 3. *Con las definiciones anteriores se extienden las funciones seno y coseno a todo* $\mathbb{R}$. *Además*

- *es evidente que las funciones seno y coseno, así definidas, son funciones* 2π*-periódicas;*
- *con paciencia, se prueba de forma evidente que las funciones seno y cosenos son continuas y derivables con* $\cos'\theta = -\operatorname{sen}\theta$ *y* $\operatorname{sen}'\theta = \cos\theta$;
- *de las definiciones de arriba es evidente que*

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1, \qquad \textit{para todo} \qquad \theta \in \mathbb{R};$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta;$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta.$$

Otra propiedades del seno y del coseno muy utilizadas son las siguientes. En este caso su prueba es un poco más sofisticada.

Teorema. 1. *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x \operatorname{sen}y$$

y

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

La demostración necesita de dos resultados previos.

Lema. 1. *Si* f *es una función de modo que existe* f'' *en todo* $\mathbb{R}$, $f''+f=0$ *y* $f(0) = f'(0) = 0$, *entonce* f *es la función nula.*

Demostración:

$$0 = f'' + f = f'f'' + f'f = \frac{1}{2}(f'^2 + f^2)',$$

por lo tanto la función $f'^2 + f^2$ es constente y como $f(0) = f'(0) = 0$, llegamos a que $f' = f = 0$ $\square$

Lema. 2. *Si* f *es una función de modo que existe* f'' *en todo* $\mathbb{R}$, $f''+f=0$, $f(0) = a$ *y* $f'(0) = b$, *entonce*

$$f(x) = b\operatorname{sen}x + a\cos x.$$

En particular, si $f(0) = 0$ *y* $f'(0) = 1$, *entonces* $f(x) = \operatorname{sen}x$.
En particular, si $f(0) = 1$ *y* $f'(0) = 0$, *entonces* $f(x) = \cos x$.

Demostración: Sean

$$g(x) = f(x) - b \operatorname{sen} x - a \cos x$$

así

$$g'(x) = f'(x) - b \cos x + a \operatorname{sen} x$$

y

$$g''(x) = f''(x) + b \operatorname{sen} x + a \cos x.$$

Luego $g + g'' = 0$ con $g(0) = f(0) - a = g'(0) = f'(0) - b = 0$. Así por el Lema anterior $g = 0$, lo que prueba el enunciado $\square$

Demostración: (**del Teorema**).

- Sea $y \in \mathbb{R}$ fijo y $f(x) = \operatorname{sen}(x + y)$, entonces

  $$f'(x) = \cos(x + y)$$

  y

  $$f''(x) = -\operatorname{sen}(x + y).$$

  Así $f'' + f = 0$ con $f(0) = \operatorname{sen} y$ y $f'(0) = \cos y$, luego el Lema anterior nos dice que

  $$f(x) = \operatorname{sen} y \cos x + \cos y \operatorname{sen} x.$$

- Sea $y \in \mathbb{R}$ fijo y $f(x) = \cos(x + y)$, entonces

  $$f'(x) = -\operatorname{sen}(x + y)$$

  y

  $$f''(x) = -\cos(x + y).$$

  Así $f'' + f = 0$ con $f(0) = \cos y$ y $f'(0) = -\operatorname{sen} y$, luego el Lema anterior nos dice que

  $$f(x) = \cos y \cos x - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$$

$\square$

Otras funciones trigonométrica. Definidas el seno y el coseno se pueden definir otras funciones a partie de ellas.

$$\textbf{secante} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

y

$$\textbf{tangente} \qquad \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

siempre que $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

$$\textbf{cosecante} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

y

$$\textbf{cotangente} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

siempre que $x \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

$$\textbf{arcoseno} \qquad \arcsin x = \operatorname{sen}^{-1} x$$

y

$$\textbf{arcocoseno} \qquad \arccos x = \cos^{-1} x = B(x)$$

siempre que $x \in [-1, 1]$.

$$\textbf{arcotangente} \qquad \arctan x = \tan^{-1} x$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Las propiedades de estas funciones: derivadas, gráficas...etc se deducen de las del seno y cosenos usandos los resultados que ya conocemos. Por ejemplo, la gráfica de la función tangente es

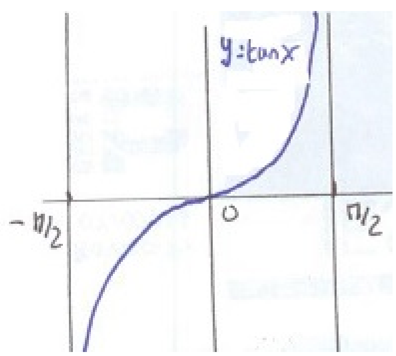

Figura 8. Gráfica de la tangente.

o de su inversa la arcotangente

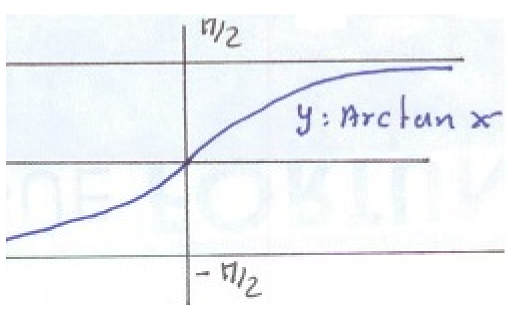

Figura 9. Gráfica de la función arcotangente.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es