ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LAS FUNCIONES LOGARITMO Y EXPONENCIAL.

A partir de la integral y el Teorema Fundamental del Cálculo podemos definir y demostrar las propiedades de las **funciones logaritmo y exponencial**.

Función Logaritmo.

Definición. 1. *Se define la función **logaritmo** (neperiano) por*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

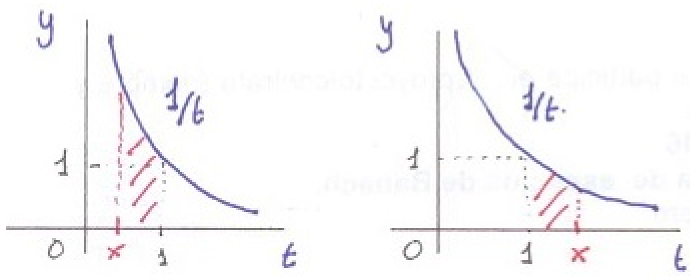

FIGURA 1. Definición gráfica del logaritmo.

Como la función $f(t) = \frac{1}{t}$ es continua en $(0, \infty)$, la integral de esta función está definida en todo intervalo cerrado de su dominio.

Así:

- $\operatorname{Dom} \ln = (0, \infty)$.
- Si $x \in (0, 1)$ se tiene que $\ln x < 0$ y es positivo si $x > 1$. Además $\ln 1 = 0$.
- $(\ln)' x = \frac{1}{x}$, por el Teorema Fundamental del Cálculo. La derivada es siempre positiva luego la función es creciente.
- $(\ln)'' x = \frac{-1}{x^2}$. La derivada segunda es siempre negativa luego la función es concava.

- $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

  Demostración: Como la función es creciente, si no está acotada el límite será infinito. Sea $N \in \mathbb{N}$, entonces
  $$\ln N = \int_1^N \frac{1}{t}dt \geq \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i}(i-(i-1)) = \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i} \to_{N\to\infty} \infty,$$
  ya que la serie armónica diverge. Luego el logaritmo no está acotado superiormente. $\square$

- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

  Demostración: Como la función es creciente, si no está acotada inferiormente, el límite será menos infinito. Sea $N \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{1}{N} \to_{N\to\infty} 0$ y
  $$\begin{aligned} \ln\frac{1}{N} &= \int_1^{\frac{1}{N}} dt = -\int_{\frac{1}{N}}^{1} \frac{1}{t}dt \\ &\leq -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\frac{1}{i}}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{N-1} i\frac{1}{i(i+1)} = -\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{(i+1)} \to_{N\to\infty} -\infty, \end{aligned}$$
  ya que la serie armónica diverge. Luego el logaritmo no está acotado inferiormente. $\square$

Con todos estos datos ya podemos dibujar la gráfica del logaritmo.

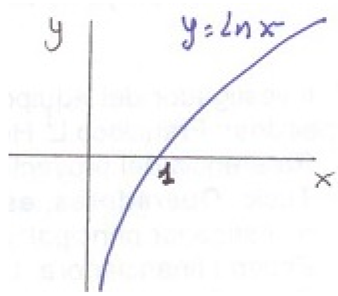

Figura 2. Gráfica de la función logaritmo.

La propiedad histórica del logaritmo es que es una función que convierte productos en sumas. Antiguamente esta propiedad era muy importante para calcular (productos y divisiones).

Proposición. 1. *Para todo $x, y > 0$ se tiene que $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. En consecuencia*

- $\ln x^n = n \ln x$ *para todo* $x > 0$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$;
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$;
- $\ln(\frac{y}{x}) = \ln y - \ln x$.

Demostración: Consideremos $y > 0$ fijo y la función $f(x) = \ln(xy)$. La función f es derivable y

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Como f y ln tienen la misma derivada, se tiene que existe K constante con

$$f(x) = \ln x + K \qquad \text{para todo} \qquad x > 0.$$

Ahora, para $x = 1$

$$f(1) = \ln y = \ln 1 + K,$$

así $K = \ln y$ y queda probada la igualdad.

- $\ln x^n = \ln(xxxx....x) = \ln x + \ln x + ... + \ln x = n \ln x$.
- $0 = \ln(\frac{x}{x}) = \ln x + \ln(\frac{1}{x})$, despejando se tiene que $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$.
- $\ln(\frac{y}{x}) = \ln(y\frac{1}{x}) = \ln y - \ln x$.

$\square$

Función Exponencial. La función logaritmo tiene por derivada $\frac{1}{x} > 0$, por el Teoream de Valor Medio es una función inyectiva, es decir $\ln x = \ln y$ si y solo si $x = y$. Por lo tanto cabe definir su inversa.

Definición. 2. *exp*$(x) = (\ln)^{-1} x$.

Veamos propiedades de esta función, así definida.

- $\mathrm{Dom}\exp = \mathrm{Im}\ \ln = \mathbb{R}$. Además $\mathrm{Im}\exp = \mathrm{Dom}\, ln = (0, \infty)$. Así

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty).$$

- Como la derivada del logaritmo no se anula, el Teorema de la Función Inversa nos dice que la exponencial es derivable y que

$$(\exp)'(x) = \frac{1}{(\ln)'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x.$$

  Luego es una función que coincide con su derivada.
- La exponencial es creciente y convexa ya que $(\exp)'x = (\exp)''x = \exp x > 0$.
- $\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$ y $\lim_{x \to \infty} \exp x = \infty$ ya que $\ln x \to_{x \to 0^+} = -\infty$ y $\ln x \to_{x \to \infty} = \infty$.

Ya estamos en condiciones de pintar la gráfica de la exponencial, realmente es la del logaritmo mirando desde el eje de ordenadas ($x = 0$).

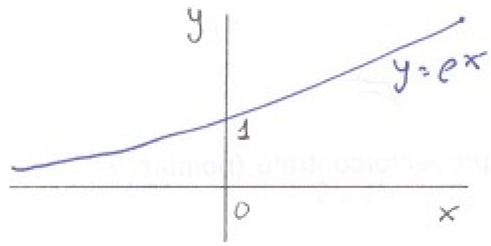

FIGURA 3. Grafica de la exponencial.

Proposición. 2. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $exp(x + y) = expx\ expy$*

Demostración: Sean $x' = \exp x$ y $y' = \exp y$, así $x = \ln x'$ y $y = \ln y'$. De lo que se deduce que

$$x + y = \ln x' + \ln y' = \ln x'y'.$$

Tomando exponenciales

$$\exp(x + y) = \exp(\ln x'y') = x'y' = \exp x \exp y$$

□

Definición. 3. *Llamamos e al número $e = exp\, 1$.*

Como para todo n natural, $\exp n = (\exp 1)^n = e^n$, escribimos

$$\exp x = e^x.$$

Veamos que este número e es el que ya conocemos por al Teoría de Sucesiones.

Teorema. 1. $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.

Demostración: Vimos que la sucesión $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n=1}^{\infty}$ era una sucesión creciente y acotada y por tanto tenía un límite que llamaremos l.

Consideramos la función

$$f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x}) \qquad \text{para} \qquad x > 0.$$

Calculando límites, usando la Regla de L'Hôpital si es necesario,

$$\lim_{x\to\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1.$$

Tomando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} n \ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = 1.$$

Por otro lado, de la continuidad del logaritmo si $(1+\frac{1}{n})^n \to_{n\to\infty} l$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = \ln l = 1.$$

Por lo tanto $l = e$ $\square$

Propiedades de la exponencial

Proposición. 3. **a:** *Se f es una función de modo que $f'(x) = f(x)$, entonces existe k constante tal que*

$$f(x) = ke^x \qquad \textit{para todo} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b: *Fijado $n \in \mathbb{N}$, entonces* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$.

Demostración:

a: La exprexión $f = f'$ es un primer ejemplo de **ecuación defirencial**.

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$. Derivando

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = 0.$$

Si g tiene derivada nula es por que es una constante $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} = k$. Despejando tenemos el resultado.

b: Aplicando n veces la Regla de L'Hôpital tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = ... = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty$$

$\square$

Funciones definidas a través de la exponencial.

Definición. 4. ***A)*** *Para $a > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ se define la exponencial de base a por*

$$a^x = e^{x \ln a}$$

B) *Para $a > 1$, $a \neq 1$ podemos definir la inversa de a^y, notamos*

$$\log_a x = (a^y)^{-1}.$$

De esta definición es fácil probar que:

- $(a^b)^c = a^{bc}$.

- $a^1 = a$.
- $a^{x+y} = a^x a^y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, ya que

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a} \ln a} = x.$$

- $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

Definición. 5. *(**Funciones Hiperbólicas.**) Llamamos*

a: ***Seno hiperbólico*** *a la función* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b: ***Coseno hiperbólico*** *a la función* $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c: ***Tangente hiperbólica*** *a la función* $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

De estas definiciones es fácil probar que:

- $\sinh' x = \cosh x, \qquad \cosh' x = \sinh x \quad$ y $\quad \tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Estas funciones son útiles para calcular primitivas de funciones del tipo $\sqrt{1+x^2}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

  Demostración: Como $\sinh' x = \cosh x > 0$, se sigue que el seno hiperbólico es inyectiva y por tanto tiene una inversa. Usando el Teorema de la Función Inversa y que $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$

$$(\sinh^{-1})'(x) = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\sinh^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es