ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CRITERIO DE INTEGRABILIDAD DE LEBESGUE.

El Critero de Integrabilidad de Riemann nos caracteriza las funciones acotadas integrables. De allí vemos que las funciones continuas son integrables. Pero no solo. En los ejemplos hemos visto funciones con una cantidad finita de discontinuidades que también son integrables. La relación entre continuidad e integrabilidad nos lo da el *Criterio de Lebesgue*. Antes una definición.

Definición. 1. *Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ decimos que tiene* ***contenido cero*** *si para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos abiertos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ de modo que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i < \epsilon.$$

Ejercicio. 1. *Prueba que cualquier conjunto finito o numerable de $\mathbb{R}$ tiene contenido cero.*

Teorema. 1. ***(Criterio de Lebesgue)*** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable en $[a, b]$ si y solo si el conjunto de discontinuidades de f tiene contenido cero.*

La prueba de este resultado se verá en un curso posterior de Cálculo Integral.

Este resultado tan fuerte nos permite conocer las siguientes afirmaciones.

Proposición. 1. *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona. Entonces existe*

$$\int_a^b g(x)dx.$$

Demostración: Vimos en el Apéndice sobre Funciones Monótonas que el conjunto de discontinuidades de una función monótona es a lo más numerable. Por tanto tiene contenido cero y por el Criterio de Lebesgue la función es integrable $\square$

Proposición. 2. *Si* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es integrable,* f *continua y* $g([a, b]) \subseteq Dom f$*, entonces* $f \circ g$ *es integrable en* $[a, b]$*.*

Demostración: Allí donde g es continua, $f \circ g$ es continua. Luego el conjunto de discontinuidades de $f \circ g$ es el mismo que él de g. Por tanto ambos son de contenido cero por ser g integrable. De lo que se sigue que $f \circ g$ es integrable en $[a, b]$ $\square$

Proposición. 3. *Sean dos funciones* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrables. Entonces*

- **a):** f^2 *es integrable.*
- **b):** fg *es integrable.*

Demostración: a) Sea $h(x) = x^2$, entonces $f^2(x) = h \circ f(x)$. Como h es continua, la Proposición anterior nos dice que $h \circ f = f^2$ es integrable en [a,b].

b) Por ser f y g integrables, sabemos que $f + g$ es integrable y por tanto $(f + g)^2$, f^2 y g^2 son integrables. De lo que se sigue que

$$fg = \frac{(f + g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

es integrable $\square$

Observación. 1. *El producto de una función integrable con otra monótona es de nuevo una función integrable.*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`