**ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.**

## TEOREMAS DEL VALOR MEDIO.

Los Teoremas del Valor medio son unos resultados que nos hablan de la geometría de las gráficas de las funciones derivables, pero que tienen unas aplicaciones sorprendentes como vamos a ver. El primero de ellos es el Teorema de Rolle y geométricamente lo tenemos dado en la siguiente figura. Existe una recta tangente paralela a la recta que une los dos extremos de la gráfica.

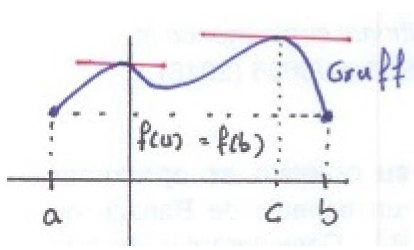


FIGURA 1. Teorema de Rolle.

De forma analítica.

**Teorema. 1.** ***(de Rolle)****. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ de modo que $f'(c) = 0$.*

**Demostración:** Si $f$ es una función constante, entonces $f' \equiv 0$ y no hay nada que probar. Si no es constante, por ser continua en $[a, b]$ tendrá un punto $c \in (a, b)$ donde $f$ alcanza un máximo o un mínimo, distinto de $x = a$ o $x = b$. Entonces, además, $c$ es un extremo local y como la función es derivable en $(a, b)$ se tiene que $f'(c) = 0$ $\square$

El Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema del Valor Medio. Geométricamente lo tenemos dado en la siguiente figura. Existe una recta tangente paralela a la recta que une los dos extremos de la gráfica.

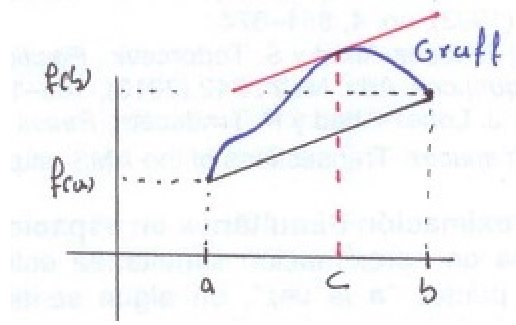


FIGURA 2. Teorema del Valor Medio.

De forma analítica.

**Teorema. 2.** ***(del Valor Medio)***. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ de modo que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*O equivalentemente, existe $c \in (a, b)$ de modo que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

**Demostración:** Observemos que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que une los extremos de la gráfica, el punto $(a, f(a))$ con el punto $(b, f(b))$.

Para ver la prueba, consideremos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ por serlo las funciones $f$ y $y = x - a$. Además $g(a) = g(b) = f(a)$. Luego por el Teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ de modo que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ahora despejando se tiene lo que buscabamos $\square$

El Teorema del Valor Medio tiene muchas aplicaciones en Análisis Matemático. Por ejemplo.

**Corolario. 1.** **a:** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$ y tal que $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$, entonces la función $f$ es constante.*

**b:** *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$, derivables en $(a, b)$ y tal que $f'(x) = g'(x)$, entonces la función $f(x) = g(x) + K$ para cierta constante $K$ y para todo $x \in [a, b]$.*

**c:** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)$ y tal que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a,b)$, entonces la función $f$ es inyectiva.*

**Demostración:**

**a:** Sea $x \in (a,b]$. Así $f$ verifica las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[a,x]$ y por tanto existe $c \in (a,x)$ de modo que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(a-x) = 0 \quad \text{ y por tanto } \quad f(x) = f(a).$$

**b:** Se considera $h(x) = f(x) - g(x)$. Como $h' = f' - g' = 0$, estamos en las hipótesis de **a)** y por tanto $h$ es una función constante. Despejando llegamos al resultado buscado.

**c:** Sean $x, y \in [a,b]$ con $x \neq y$, entonces por el Teorema del Valor Medio

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$$

para cierto valor $c \in (a,b)$. Como por hipótesis $f'(c) \neq 0$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$

□

**Ejercicio. 1.** *Un vehículo entró en un tunel a las 13h25' y sale a las 13h28', lo cuál queda registrado por las cámaras instaladas en ambas bocas del túnel de 4.100m. de longitud. El dueño del vehículo recibió un multa por importe de 600 euros por rebasar la velocidad permitida de 70Km/h dentro del túnel. ¿Recurrió el dueño la multa?*

**Demostración:** Consideramos $s(t)$ la posición del vehículo en el momento $t$. Podemos suponer que el coche no hace paradas y que los cambio de marchas se hacen con suavidad, es decir podemos suponer que la función $s$ es derivable. Sabemos que en el minuto 25 entró en el tunel y tres minutos después $s(28) = s(25) + 4,1$. De forma gráfica.

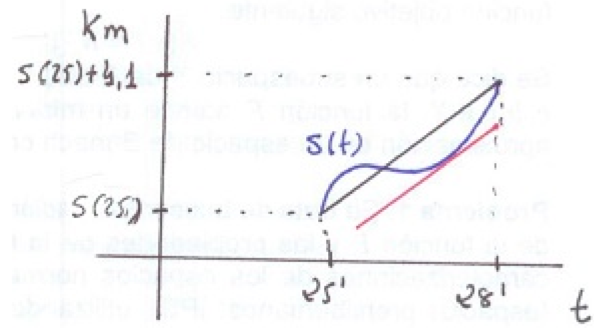


FIGURA 3. Función posición.

La velocidad media del vehículo fué de

$$v_m = \frac{4,1Km}{3'} = \frac{82Km}{60'} = 82Km/h > 70Km/h.$$

Luego la velocidad media fué mayor que la permitida. Lo que nos dice el Teorema del Valor Medio es que en algún momento $c \in (25, 28)$ se alcanzó efectivamente la velocidad media

$$v(c) = s'(c) = 82Km/h,$$

($v$ es la velocidad del vehículo en cada instante que viene dada por $s'$ ) □

El Teorema del Valor de Medio de Cauchy es análogo a los anteriores para curvas paramétricas (ver el Apéndice del Tema de Continuidad y el Apéndice de este Tema para la noción de curva paramétrica y recta tangente a tales curvas) . Geométricamente lo tenemos dado en la siguiente figura. Existe una recta tangente paralela a la recta que une los dos extremos de la curva.

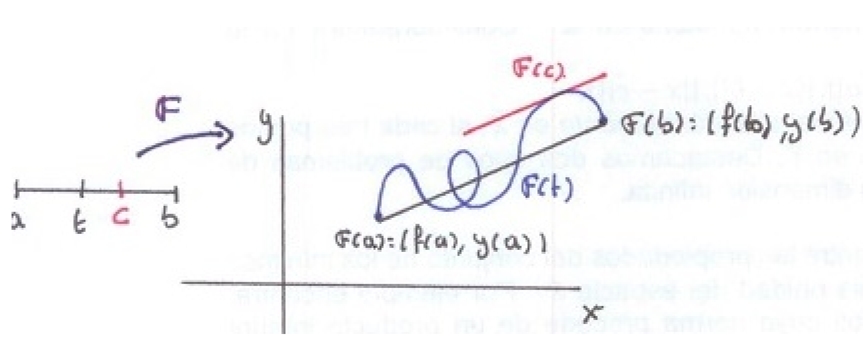


FIGURA 4. Teorema del Valor Medio de Cauchy.

De forma analítica.

**Teorema. 3.** ***(del Valor Medio de Cauchy)****. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $(a, b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ de modo que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

*O equivalentemente, si $f(a) \neq f(b)$*

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}.$$

**Demostración:** Observemos que si $f(a) \neq f(b)$ entonces $\dfrac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$ es la pendiente de la recta que une los extremos de la curva, el punto $(f(a), g(a))$ con el punto $(f(b), g(b))$.

Para ver la prueba, consideremos la función

$$h(x) = f(x)(\, g(b) - g(a)\,) - g(x)(\, f(b) - f(a)\,).$$

Esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ por serlo las funciones $f$ y $g$. Además $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Luego por el Teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ de modo que

$$0 = h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a))$$

$\square$

El Teorema del Valor Medio de Cauchy en si no nos va interesar mucho, pero si una consecuencia de él muy importante en cálculo: la **Regla de L'Hôpital** que permite calcular límites en el caso de indeterminación; algo que nos quedo pendiente cuando estudiabamos límites de funciones. Además, este Teorema de valor Medio está presente en la prueba del Teorema de Taylor que veremos al estudiar el Tema de Aproximaciones Polinómicas.

**Teorema. 4.** ***(Regla de L'Hôpital)****. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]\backslash\{s\}$ y derivables en $(a, b)\backslash\{s\}$. Si*

$$\lim_{x \to s^*} f(x) = \lim_{x \to s^*} g(x) = 0,$$

*$f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]\backslash\{s\}$ y existe*

$$\lim_{x \to s^*} \frac{g'(x)}{f'(x)},$$

*entonces existe*

$$\lim_{x \to s^*} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to s^*} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

*(aquí $s^*$ significa $s$ o $s^+$ o $s^-$).*

**Demostración:** Si suponemos que existen $f'(s) \neq 0$ y $g'(s)$, entonces la prueba es muy sencilla ya que por un lado la funciones $f$ y $g$ son continuas en $s$ y por tanto

$$\lim_{x\to s} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s} \frac{g(x)-g(s)}{f(x)-f(s)} = \lim_{x\to s} \frac{\frac{g(x)-g(s)}{x-x}}{\frac{f(x)-f(s)}{x-s}} = \frac{g'(s)}{f'(s)}.$$

Lo que nos permite el Teorema del Valor Medio de Cauchy es prescindir de la suposiciones anteriores. Podemos hacer la prueba sin que existan las derivadas de $f$ y $g$ en el punto $s$.

La prueba la vamos a hacer para límites por la derecha (de forma análoga se hace para límites por la izquierda). Con ambos límites laterales se hace la prueba para el límite.

Como existen

$$\lim_{x\to s^+} f(x) = \lim_{x\to s^+} g(x) = 0,$$

podemos suponer que $f(s) = g(s) = 0$ (sin más que redefiniendo $f$ y $g$ para $x = s$). Si tomamos $x > s$, entonces $f$ y $g$ definidas sobre $[s, x]$ están en las hipótesis del Teorema del Valor Medio de Cauchy. Observemos que, como $f(s) = 0$ y $f'(x) \neq 0$, por el Teorema de Rolle $f(x) \neq 0$ para todo $x \neq s$. Por tanto existe $c_x \in [s, x]$ de modo que

$$(f(x) - f(s))g'(c_x) = (g(x) - g(s))f'(c_x) \quad \Rightarrow \quad f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x).$$

Como $f(x) \neq 0$, tampoco se puede anular $f'(c_x)$ y así llegamos a que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)}.$$

Tomando límites cuando $x \to s^+$, (por tanto $c_x \to s^+$) y como existe $\lim_{x\to s^+} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ se tiene que

$$\lim_{x\to s^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s^+} \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)} = \lim_{y\to s^+} \frac{g'(y)}{f'(y)}$$

□

**Ejemplo. 1.** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. *Estamos ante una indeterminación del tipo cero divide a cero. Por suerte estamos en las hipótesis para poder aplicar la Regla de L'Hôpital y así*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

La Regla de L'Hôpital puede ser adaptada a casi cualquier otro caso de indeterminación, con lo cuál se convierte en una herramienta poderosa para calcular límites (¡es la herramienta!).

**Corolario. 2.** *(**Regla de L'Hôpital General**) Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $(a, b)$ salvo quizas en un punto $s$, donde $(a, b)$ es un intervalo abierto y $s \in (a, b)$ o bien $(a, b) = (-\infty, b)$ y $s = -\infty$ o bien $(a, b) = (a, \infty)$ y $s = \infty$. Se sabe que $f'(x) \neq 0$ si $x \neq s$. Si existen*

$$\lim_{x\to s^*} f(x) = \lim_{x\to s^*} g(x) = 0,$$

*o*

$$\lim_{x\to s^*} f(x) = \pm\infty \quad y \quad \lim_{x\to s^*} g(x) = \pm\infty,$$

*$f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)\backslash\{s\}$ y existe*

$$\lim_{x\to s^*} \frac{g'(x)}{f'(x)},$$

*entonces existe*

$$\lim_{x\to s^*} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s^*} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

*(aquí $s^*$ significa $s$ o $s^+$ o $s^-$ siendo $s$ un número real o $\pm\infty$).*

**Ejemplo. 2.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\arctan x - \frac{\pi}{2}}$.

**Demostración:** Por un lado $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ y por otro $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arctan x - \frac{\pi}{2} = 0$. Estamos ante una indeterminación. Como las funciones de este cociente son derivables, usaremos la Regla de L'Hôpital y así

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\arctan x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{\frac{1}{1+x^2}}$$

reordenando

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-(1 + x^2)}{e^x}$$

volvemos a tener una indeterninación del tipo $-\infty$ dividido por $\infty$. Insistimos aplicando L'Hôpital dos veces más

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{e^x} = 0.$$

□

**Ejemplo. 3.** $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

**Demostración:** El límite por la derecha tiene todo el sentido ya que el logaritmo no está definido para valores negativos. Por otro lado estamos ante una indeterminación del tipo cero por menos infinito. En principio no está en la forma en la que se aplica la Regla de L'Hôpital, pero eso se arregla con una sencilla transformación.

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

ahora ya podemos aplicar L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

□

Cuando una función viene dada por varias fórmulas, como en el ejercicio siguiente, es conveniente tener en cuenta los conceptos y el Corolario que escribimos a continuación.

- Llamamos **derivada por la derecha** de una función $f$ en el punto $x = a$, y escribimos $f'(a^+)$, al límite si existe
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$
- Llamamos **derivada por la izquierda** de una función $f$ en el punto $x = a$, y escribimos $f'(a^-)$, al límite si existe
$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

Es claro que si una función es derivable en un punto $x = a$, entonces existen las derivadas por la derecha y por la izquierda en el punto $x = a$ y

$$f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-).$$

El recíproco también es cierto.

**Corolario. 3.** *Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]\backslash\{s\}$ y derivable en $(a, b)\backslash\{s\}$. Si existe*

$$\lim_{x\to s^*} h(x) = b$$

*y existe*

$$\lim_{x\to s^*} h'(x),$$

*entonces existe*

$$h'(s^*) = \lim_{x\to s^*} h'(x),$$

*(aquí $s^*$ significa $s$ o $s^+$ o $s^-$).*

**Demostración:** Sean $f$ y $g$ las funciónes definidas por $g(x) = h(x) - b$ y $f(x) = x - s$. Estas funciones están en las hipótesis de la Regla de L'Hôpital y por tanto

$$\lim_{x\to s^*} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s^*} \frac{h(x) - b}{x - s}( = h'(s^*) )$$

aplicando L'Hôpital

$$= \lim_{x\to s^*} h'(x).$$

Puesto que este límite existe por hipótesis, se tiene que coincide con $h'(s^*)$
$\square$

Apliquemos lo anterior en el siguiente ejercicio.

**Ejercicio. 2.** *Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ x \ln x & si \quad x \in [0,1] \\ x-1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

*Dibuja la gráfica aproximada de la función y estudia sus máximos y sus mínimos.*

**Demostración:** La función es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Calculemos los límites en los extremos de su dominio.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$.
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$.
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$. Usamos el cálculo hecho en un Ejemplo anterior.
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x \ln x = 0$.
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x - 1 = 0$.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x - 1 = \infty$.

Luego vemos que la función es continua en todo $\mathbb{R}$ (en 0 y 1 existen los límites laterales y son iguales).

Como existe $f'$ para todo $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, podemos aplicar el Corolario anterior para saber si la función $f$ es derivable en 0 o 1.

- $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0$.
- $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x + 1 = -\infty$.
- $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln x + 1 = 1$.
- $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$.

Luego vemos que la función $f$ es derivable en $x = 1$, pero no lo es en $x = 0$.

Observemos que $f(x) \geq 0$ si $x \notin (0,1)$ y negativa si $x \in (0,1)$.

La derivada de la función $x^2$ solo se anula para $x = 0$. La función $x \ln x$ tiene por derivada $\ln x + 1$ y ésta se anula solo en $x = e^{-1}$. La derivada de la función $x - 1$ no se anula nunca. Luego candidatos a máximos y mínimos son el punto $x = 0$ (aquí la función no es derivable) y el punto $x = e^{-1}$ (aquí la derivada se anula). Dando valores y viendo el signo de la función es fácil convencerse de que $f$ tiene un mínimo en $x = e^{-1}$ y que no tiene máximo, ni siquiera un máximo local.

$\square$

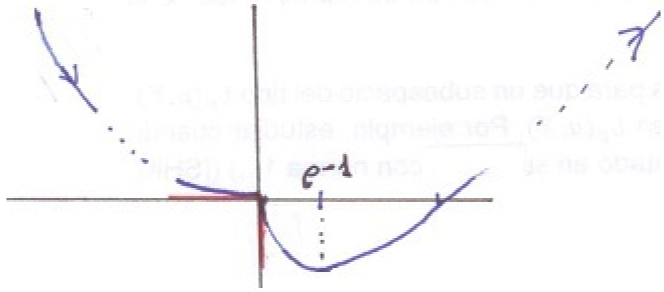


Figura 5. Gráfica aproximada de $f$.

## Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
*Email address*: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es