ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES.

Un tratamiento amplio de la integral permite el cálculo de longitudes de curvas, áreas de superficies (planas y alabeadas) y de volúmenes. Con nuestro conocimiento de la Integral de Riemann para funciones de una variable solo somos capaces de calcular áreas plana de recintos limitados por gráficas. Vamos a ir un poco más allá usando solo la integral de Riemann, aunque la justificación de lo que vamos a decir queda fuera de nuestro alcance (apuntaremos algunas ideas en los Apéndices siguientes).

Longitud de un gráfica. Vamos a dar una fórmula de la longitud de una gráfica.

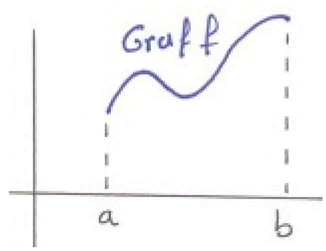

FIGURA 1. ¿Cómo medimos la longitud de una gáfica?.

Teorema. 1. *Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable con derivada f' continua en $[a,b]$, la longitud de su gráfica viene dada por la fórmula*

$$LongGraff = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

En el Apéndice: Longitud de una Curva Paramétrica, justificaremos de donde sale está fórmula. Es más, daremos una definición de longitud de una curva. Aunque todo ello queda fuera del alcance de este curso.

Ejemplo. 1. *Queremos medir la longitud del arco de parábola $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$.*

Demostración: La fórmula anterior nos dice que tenemos que calcular

$$\int_0^1 \sqrt{1+(\,(x^2)'\,)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$$

Vamos a calcular una primitiva de esta función. Así

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx$$

si hacemos el cambio de variable $y = 2x$, así dy=2dx, tenemos

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{1+y^2}dy$$

el cambio de variable $y = \operatorname{senh} u$, y así $dy = \cosh u$, tenemos

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 u}\cosh u du = \frac{1}{2}\int \cosh^2 u du$$

usando la relaciones de las funciones hiperbólicas (ver Artículo: Otras Técinas de Cálculo de Primitvas)

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cosh 2u}{2} + \frac{1}{2}du = \frac{1}{8}\operatorname{senh} 2u + \frac{1}{4}u$$

como $\text{senh}2u = 2\text{cosh}u\text{senh}u = 2\sqrt{1+\text{senh}^2 u}\text{senh}u$ y $u = \text{arcsenh}y$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{1+y^2}y + \text{arcsenh}y) = \frac{1}{4}(\sqrt{1+4x^2}2x + \text{arcsenh}2x).$$

Luego tenemos que

$$\int_0^1 \sqrt{1+(\,(x^2)'\,)^2}dx = (\frac{1}{4}(\sqrt{1+4x^2}2x + \text{arcsenh}2x)|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\text{arcsenh}2}{4}$$

□

Área entre gráficas. Sabemos calcular el área por debajo de una gráfica de una función positiva.

Vamos a definir el área entre dos gráficas.

Definición. 1. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables sobre el intervalo $[a,b]$, Definimos el recinto entre las dos gráficas por*

$$A_{f,g} = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in [a,b] \;\; y \; con \;\; f(x) \le y \le g(x) \;\; o \; g(x) \le y \le f(x)\,\}.$$

El siguiente dibujo nos convence de como calcular el área entre dos gráficas.

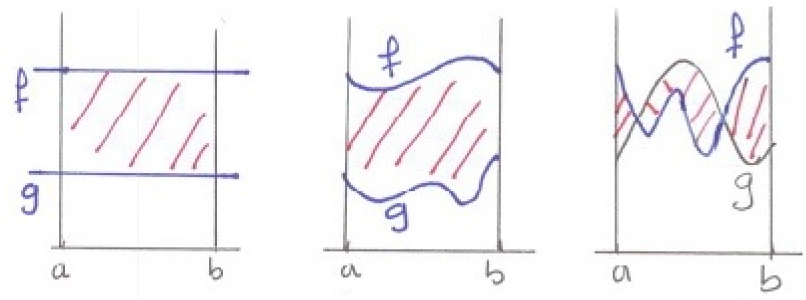

FIGURA 2. Área entre dos gráficas.

Teorema. 2. *$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$. El área del recinto entre gráficas $A_{f,g}$ viene dada por*

$$\int_a^b |(f-g)(x)|dx.$$

Ejemplo. 2. *Vamos a calcular el área comprendida entre las gráficas: $y = 2 - x^2$ e $y^3 = x^2$.*

Demostración: Representamos las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$, algo que no es muy complicado (observemos que ambas son funciones pares).

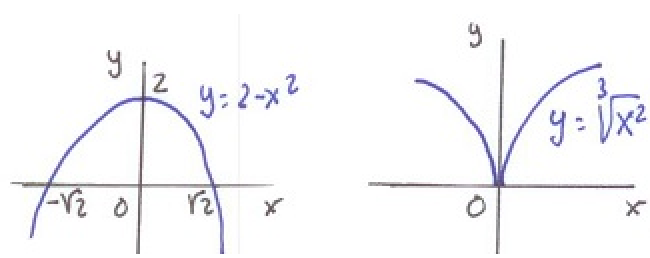

FIGURA 3. Gráficas de las funciones f y g.

A continuación las sobreponemos mirando los puntos donde se cortan, es decir las soluciones de

$$2 - x^2 = \sqrt[3]{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad (2 - x^2)^3 = x^2$$

y las soluciones son claramente $x = -1$ y $x = 1$. Así tenemos que el área a calcular es

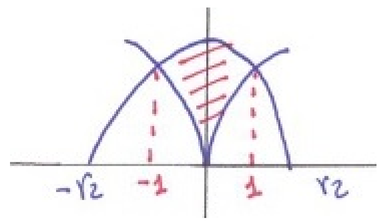

FIGURA 4. Área entre dos gráficas.

Vemos además que $f(x) = 2 - x^2 \geq \sqrt[3]{x^2}$ para todo $x \in [-1, 1]$. Luego el área entre gráfica es

$$\int_{-1}^{1} |2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}|dx = \int_{-1}^{1} 2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}dx$$

$$= (2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^{5/3}}{5}|_{-1}^{1} = 2(2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}) = 2(2 - \frac{14}{15}) = \frac{2}{15}$$

□

La circunferencia y el círculo. En el Artículo de Representanción de Gráficas pintamos la elipse

$$y = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}.$$

Cuando $a = b$ tenemos una circunferencia de radio a. De la circunferencia de radio 1 conocemos su longitud y el área del círculo.

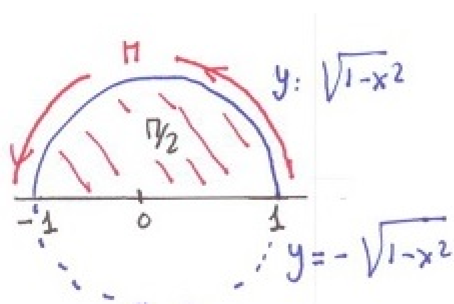

FIGURA 5. Área del semicírculo y longitud de la semicircunferencia.

¿De donde salen estos números? Como la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua en $[-1, 1]$, la siguiente definición tiene sentido.

Definición. 2. *Llamamos número π (pi) al valor de la integral*

$$\pi = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx.$$

Ejercicio. 1. *¿Cuál es la longitud de la semicircunferencia de radios* 1 *?*

Demostración: Tenemos la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Por la fórmula del cálculo de la longitud de una gráficas y como $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, así

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+f'^2(x)}dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^2}dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Observemos que lo que hemos calculado es una integral impropia dado que hemos integrado una función no acotada. De hecho, hemos abusado de la fórmula de la longitud de una gráfica. La forma correcta hubiese sido calcular

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{r\to -1^+} \int_{r}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{s\to 1^-} \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

El resultado es el mismo $\square$

Ejercicio. 2. *¿Cuál es el área de la semicírculo de radios R ?*

Demostración: Tenemos la función $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$. El área por debajo de una gráfica es

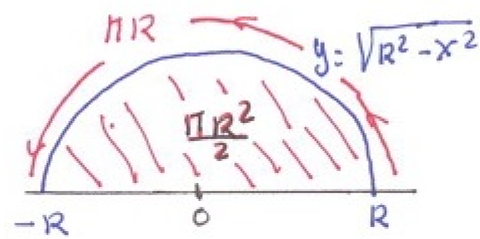

FIGURA 6. Área del semicírculo de radio R.

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx = \int_{-R}^{R} R\sqrt{1-(\frac{x}{R})^2}dx$$

es cambio de variable $y = \frac{x}{R}$, y así $dy = \frac{1}{R}dx$, nos da

$$= R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy = \frac{\pi R^2}{2}$$

por la definición de π. Luego nos sale la solución conocida $\square$

Observación. 1. *La definición que hemos dado del número π es coherente con lo que sabemos sobre áreas de círculos y longitudes de circunferencias.*

Ejercicio. 3. *Consideramos la semicircunferncia de radio la unidad* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. *Fijamos un punto sobre la gráfica* $(x, y) = (x, \sqrt{1-x^2})$. *Este punto determina un sector circular. Lo que vamos a probar es que el área del sector circular es la mitad que la longitud del arco del sector:* θ.

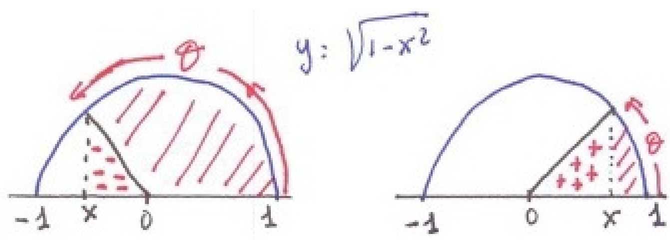

FIGURA 7. Sector circular.

Demostración: Sea $A(x)$ el área del sector circular determinado por los puntos: $(0,0), (1,0)$ y $(x, \sqrt{1-x^2})$. Así

$$A(x) = \int_x^1 \sqrt{1-s^2}ds + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

El segundo sumando es el área de un triángulo que suma si $x > 0$ y que resta en otro caso.

Sea $\theta(x)$ la longitud del arco del sector de arriba. Así aplicando la fórmula de la longitud de una gráfica

$$\theta(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds$$

(según hemos visto al calcular al longitud de la semicircunferencia un poco más arriba).

Lo que queremos probar es que

$$2A(x) = \theta(x) \quad \text{para todo} \quad x \in [-1, 1].$$

Consideramos la función $H(x) = 2A(x) - \theta(x)$. Es claro que $H(1) = 0$. Y que es continua en $[-1, 1]$ (ejercicio).

Por otra parte, usando el Teorema Fudamental del Cálculo

$$H'(x) = 2A'(x) - \theta'(x)$$
$$= -2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Como su derivada es nula, H es constante y como $H(0) = 0$, vemos que es una función nula

□

Volumen de un sólido de revolución.

Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, podemos hacer girar su gráfica alrededor del eje de abcisas ($y = 0$). Con ello producimos un **sólido de revolución**

$$V_f = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \in [a,b] \text{ y } y^2 + z^2 \leq f(x)^2 \,\}.$$

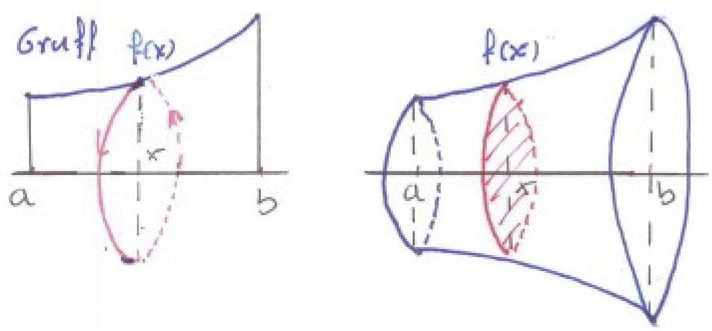

FIGURA 8. Volumen de Revolución.

Tenemos una fórmula para calcular este tipo de volumenes.

Teorema. 3. *Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces el **volumen** del sólido de revolución que produce la gráfica de f al rotar respecto del eje $y = 0$ es*

$$Vol V_f = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Observemos que lo que hacemos es integrar las áreas de las secciones circulares del sólido. Probar este resultado no está a nuestro alcance, pués supone conocer la integral de Riemann para funciones de varias variables y el Teorema de Fubinni (la herramienta que permite calcularlas reduciendo el problema a calcular varias integrales de funciones de una variable).

Ejemplo. 3. *Vamos a calcular el volumen que se produce al girar, alrededor del eje $0X$, el arco de catenaria $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ para $a \in [-a,a]$.*

Demostración: Tenemos la función

$$f(x) = a\cosh(\frac{x}{a}) = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} > 0.$$

Claramente es una función continua. Observemos además que

$$f^2(x) = a^2\frac{e^{2\frac{x}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x}{a}}}{4}.$$

El volumen del sólido de revolución que genera es, según la fórmula de arriba,

$$\int_{-a}^{a} \pi a^2 \cosh^2(\frac{x}{a})dx$$

usando las fórmulas hiperbólicas (ver el artículo Cálculo de Primitivas: Otras Técnicas)

$$= \pi a^2 \int_{-a}^{a} \frac{1+\cosh(2\frac{x}{a})}{2}dx = \frac{\pi a^2}{2}(x + \frac{a}{2}\operatorname{senh}(2\frac{x}{a})|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}(2a + \frac{a}{2}2\operatorname{senh} 2) = \pi a^3 + \frac{\pi a^3}{2}\operatorname{senh} 2 = \pi a^3(1+\frac{\operatorname{senh} 2}{2}).$$

El cálculo anterior también lo podiamos haber echo de la forma

$$\int_{-a}^{a} \pi a^2 \cosh^2(\frac{x}{a})dx = \pi a^2 \int_{-a}^{a} \frac{e^{2\frac{x}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x}{a}}}{4}dx$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}[\frac{a}{2}e^{2\frac{x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-2\frac{x}{a}}|_{-a}^{a} = \pi a^3(1+\frac{\operatorname{senh} 2}{2})$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`