ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE RIEMANN.

Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, positiva ($f \geq 0$) y cuya gráfica presenta una situación del tipo:

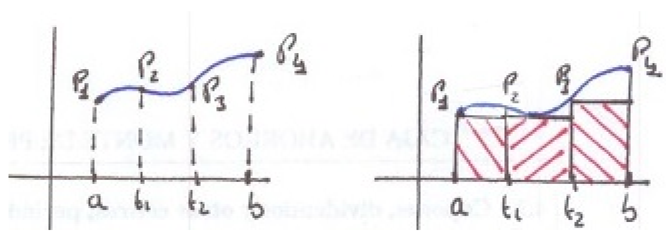

FIGURA 1. Aproximación por rectángulos.

Antes de aproximar por rentángulos tenemos que dividir el intervalo donde está definida la función.

Definición. 1. *Dado un intervalo cerrado de la recta* $[a, b]$ *llamamos **partición** del intervalo a todo conjunto finito del mismo*

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n \in [a, b]\,\}$$

de modo que

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < .... < t_n = b.$$

Llamamos $P([a, b]) = \{P \ : \ P \text{ partición de } [a, b]\}$, *es decir al conjunto de todas las particiones del intervalo* $[a, b]$.

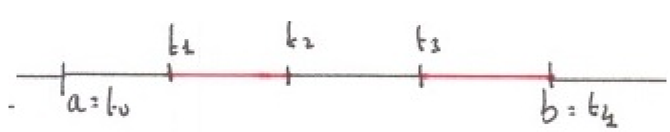

FIGURA 2. Partición de un intervalo.

Ejemplo. 1. *Dado el intervalo* $[1, 3]$, *dos ejmplos de particiones de este intervalo son*

- $P = \{1, \frac{3}{2}, e, 3\}$. *Esta partición tiene* 4 *elementos y divide el intervalo en tres partes.*
- $P' = \{1, \frac{3}{2}, 2, e, 3\}$. *Esta partición tiene* 5 *elementos y divide el intervalo en cuatro partes.*

Una partición sobre un intervalo descompone este en intervalos más pequeños cuya unión es el total.

Observemos que en el ejemplo anterior $P \subset P'$. La partición P' contiene todos lo elementos de la partición P y alguno más.

Definición. 2. *Dada dos particiones $P, P' \in P([a, b])$ de un intervalo $[a, b]$, se dice que la partición P' es más* ***fina*** *que la partición P si $P \subset P'$.*

Una partición más fina que otra divide el intervalo en más subintervalos que la que es menos fina.

Lema. 1. *Dada dos particiones $P, P' \in P([a, b])$ de un intervalo $[a, b]$, existe otra partición P'' que es más fina que las otras dos.*

Demostración: Para ello solo hay que considerar $P'' = P \bigcup P'$ $\square$

Las particiones de un intervalo nos dan las "bases" de los rectángulo con los que queremos aproximar nuestras "áreas". Vamos a hora con las alturas.

Definición. 3. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$* ***acotada*** *y sea $P \in P([a, b])$ una partición del intevalo $[a, b]$*

$$P = \{a = t_0 < t_1 < .... < t_n = b\}.$$

Se definen

$$M_i = M_{[t_i,t_{i+1}]} = \sup\{f(t) \ : \ t \in [t_i, t_{i+1}]\} \quad para \quad i = 0, 1, 2, .., n - 1;$$

y

$$m_i = m_{[t_i,t_{i+1}]} = \text{ínf}\{f(t) \ : \ t \in [t_i, t_{i+1}]\} \quad para \quad i = 0, 1, 2, .., n - 1.$$

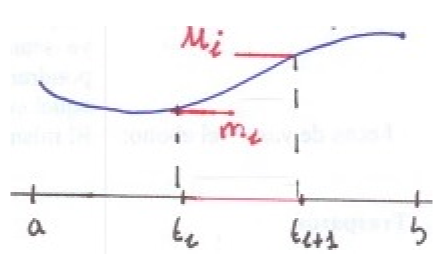

Figura 3. Supremo e ínfimo en un subintervalo.

Observemos que los supremos e ínfimos de la definición existen por que la función f la tomamos acotada (además de la Propiedad del Extremo Superior de $\mathbb{R}$ que vimos en el primer Tema).

El siguiente paso es definir la suma de las áreas de la rectángulos que van a aproximar nuestra figura.

Definición. 4. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$* ***acotada*** *y sea $P \in P([a, b])$ una partición del intevalo $[a, b]$.*

a: *Se define la* ***suma superior*** *de la función f con respecto a la partición P por*

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i).$$

b: *Se define la* ***suma inferior*** *de la función f con respecto a la partición P por*

$$I(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i).$$

Aquí M_i y m_i son los supremos e ínfimos definidos arriba.

Observemos que $M_i(t_{i+1} - t_i)$ es el área del rectángulo de base el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ y altura M_i.

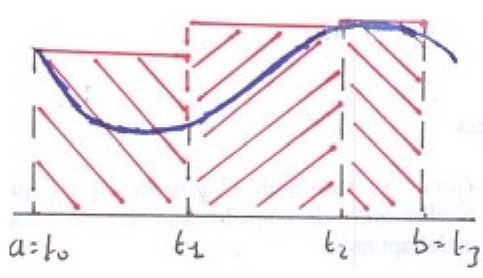

FIGURA 4. Aproximación superior.

De la misma forma $m_i(t_{i+1} - t_i)$ es el área del rectángulo de base el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ y altura m_i.

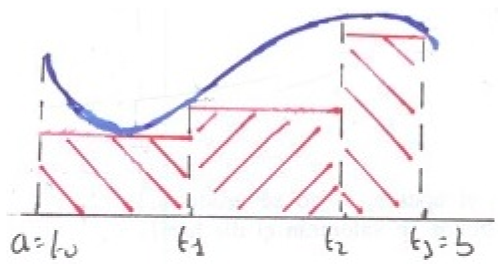

Figura 5. Aproximación inferior.

Lema. 2. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **acotada** y sea $P \in P([a, b])$ una partición del intevalo $[a, b]$. Entonces*

$$I(f, P) \leq S(f, P).$$

Demostración: La prueba es muy sencilla ya que $m_i \leq M_i$ y $t_{i+1} - t_i \geq 0$ para todo $i = 0, 1, 2, ..., n - 1$. $\square$

Lema. 3. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **acotada** y sean $P, P' \in P([a, b])$ dos particiones del intevalo $[a, b]$. Si P' es más fina que P (es decir P' tiene todos los punto de P y alguno más), entonces*

$$(*) \qquad I(f, P) \leq I(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

Demostración: En primer lugar supondremos que $P = \{t_0 < t_1 < .... < t_n\}$ tiene solo un punto menos que P', así

$$P' = P \bigcup \{c\}$$

y

$$P' = \{t_0 < t_1, ..., t_j < c < t_{j+1}, ..., t_n\} \quad \text{para algún} \quad j.$$

Entonces como

$$m_i \leq \min\{m_{[t_j,c]}, m_{[c,t_{j+1}]}\} \quad \text{y} \quad M_j \geq \max\{M_{[t_j,c]}, M_{[c,t_{j+1}]}\},$$

por tanto

$$I(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i)$$

$$\leq \sum_{i=0, i\neq j}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i) + m_{[t_j,c]}(c - t_j) + m_{[c,t_{j+1}]}(t_{j+1} - c) = I(f, P')$$

y

$$\leq S(f, P') = \sum_{i=0, i\neq j}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i) + M_{[t_j,c]}(c - t_j) + M_{[c,t_{j+1}]}(t_{j+1} - c)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i) = S(f, P).$$

Lo que prueba $(*)$ en este caso.

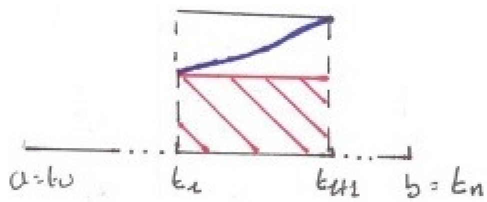

Figura 6. Demostración sin palabras.

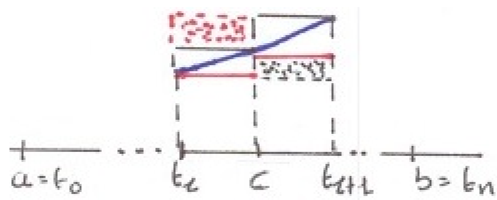

Figura 7. Demostración sin palabras.

Para terminar si $P' = P \bigcup \{c_1, ..., c_k\}$, probamos $(*)$ para P y $P \bigcup \{c_1\}$, después para $P \bigcup \{c_1\}$, y $P \bigcup \{c_1, c_2\}$,....etc $\square$

Proposición. 1. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **acotada** y sean $P, P' \in P([a, b])$ dos particiones del intevalo $[a, b]$ cualesquiera. Entonces*

$$I(f, P) \leq S(f, P').$$

Demostración: Sea $P'' = P \bigcup P'$ una partición más fina que P y que P', entonces por el lema anterior

$$I(f, P) \leq I(f, P'') \leq S(f, P'') \leq S(f, P')$$

$\square$

Acabamos de probar que cualquier suma inferior esta acotada por cualquier suma superior y diceversa. Esto nos premite dar la siguiente definición.

Definición. 5. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **acotada**.*

a: *Se define la integral superior de f en el intervalo $[a, b]$ por el número real*

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{S(f, P) \ : \ P \in P([a, b])\}.$$

b: *Se define la integral inferior de f en el intervalo $[a,b]$ por el número real*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{ I(f,P) \ : \ P \in P([a,b]) \}.$$

Para una función f acotada, estas integrales superiores e inferiores siempre existen y además, de la definición de tales números, se sigue que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Lo que hemos hecho es aproximar un "área" por rectángulos inscritos dentro del área, de modo que al hacer más pequeñas las bases conseguiamos una mejor aproximación. Pasando al límite, tomando el supremo, hemos llegado a la integral inferior.

De forma análoga, hemos aproximado un "área" por rectángulos que continenen al área, de modo que al hacer más pequeñas las bases conseguiamos una mejor aproximación. Pasando al límite, tomando el ínfimo, hemos llegado a la integral superior.

Ya estamos en condiciones de dar de dar la definición de **integral.**

Definición. 6. *Sea una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,* ***acotada****. Decimos que la función es* ***integrable*** *en el intervalo $[a,b]$ si*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Llamamos ***integral*** *f en el intervalo $[a,b]$ al número real*

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Una definición larga y enrevesada. ¿Tiene esto que ver con un área?

Ejemplo. 2. ***(Función de Dirichlet)****. Sea considera la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x\in\mathbb{Q} \\ 0, & si \quad x\in[0,1]\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Claramente esta función está acotada ($0\leq f(x)\leq 1$) y como todo intervalo contiene tanto un número racional como irracional se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f = 0 < 1 = \overline{\int_a^b} f.$$

Luego ***no*** *es una función integrable.*

Si intentamos pintar la gráfica de esta función veremos que no nos queda un recinto donde buscar un área. Lo que vamos a decir ahora es que área e integral son la misma cosa.

Definición. 7. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$* ***acotada, positiva*** *(es decir $0 \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$) e* ***integrable****.*

a: *Se define el recinto que queda por debajo de la gráfica de f al conjunto del plano*

$$A_f = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a, b] \quad y \quad 0 \leq y \leq f(x) \,\}.$$

b: *Llamamos área de A_f al número $\int_a^b f$.*

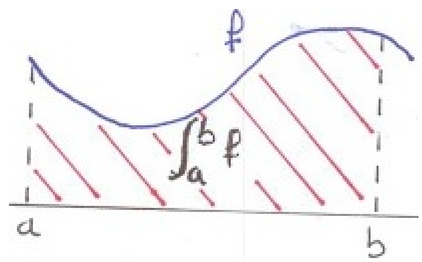

Figura 8. Área por debajo de una gráfica.

Ante tanto despliegue de teoría nos surgen dudas como: ¿cuando una función es integrable? ¿ Está definición de área es la misma que conocemos? ¿Como se hace un cálculo efectivo de integrales? A estas cuestiones vamos a dar respuesta poco a poco. Si es importante recordar para algunas aplicaciones de la integral (en Física por ejemplo) que la integral no es más que un límite de sumas de productos:

$$\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i).$$

Además la estimación anterior es una forma aproximada de calcular integrales, no la más eficiente, pero si la más sencilla.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`