**ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.**

## CÁLCULO DE PRIMITIVAS. EL TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE.

La Regla de la Cadena de derivación:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

nos permite el siguiente recurso para calcular primitivas.

**Corolario. 1.** ***(Fórmula de Sustitución)*** *Si $f$ y $g'$ son funciones continuas, entonces*

**a:** *Si $F$ es una primitiva de la función $f$, entonces $F \circ g$ es una primitiva de la función $(f \circ g)g'$, es decir*

$$\int f \circ g(x)g'(x)dx = F \circ g(x).$$

**b:** *Si $G$ es una primitiva de la función $(f \circ g)g'$, entonces $G \circ g^{-1}$ es una primitiva de la función $f$, es decir*

$$\int f dx = G \circ g^{-1}(x).$$

**Demostración:** Aplicando la Regla de la Cadena en ambos casos tenemos

**a:** $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f \circ g(c)g'(x)$.

**b:**

$$((G \circ g^{-1})'(x) = G'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$
$$= f \circ g(g^{-1}(x))g'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x)$$

□

**Observación. 1.** *En ambos casos transformamos unas integrales en otras con la esperanza de que estas otras sean más sencillas.*

**a:** *Ante la integral $\int f \circ g(x)g'(x)dx$ (tenemos que ver una función $g$ compuesta con otra $f$ y de modo que tengamos su derivada $g'$), en este caso el problema se puede reducir encontrando $\int f$.*

**b:** *Ante la integral* $\int f(x)dx$ *buscamos una función* $g$ *de modo que sepamos resolver el problema* $\int f(g(x))g'(x)dx$.

*El caso* ***a****) es el más fácil de reconocer y de resolver usualmente. El caso* ***b****) necesita más imaginación pues la función* $g$ *no aparece explícita.*

**Ejemplo. 1.** **a:** $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx.$

**b:** $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

**Demostración:**

**a:** $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$. La derivada de $g(x) = -x^2$ es $g'(x) = -2x$. Ésta, salvo una constante, aparece en nuestra integral. Ponemos

$$\int xe^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx.$$

Así la fórmula de sustitución nos dice que si resolvemos el problema $\frac{-1}{2}\int e^x dx = \frac{-1}{2}e^x$, entonces la solución de nuestro problema es $\frac{-1}{2}e^{g(x)} = \frac{-1}{2}e^{-x^2}$. (**Notación heurística:**) también podemos escribir

$$\int xe^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx$$

haciendo el cambio de variable $u = g(x)$, así $\frac{du}{dx} = -2x$ y $du = -2xdx$

$$= \frac{-1}{2}\int e^u du = \frac{-1}{2}e^u$$

ahora deshaciendo el cambio de variable

$$= \frac{-1}{2}e^{-x^2}.$$

**b:** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$. Podemos pensar en sustituir $x$ por $\ln u$ ($g(u) = \ln u$ y $g'(u) = \frac{1}{u}$). La Fórmula de Sustitución nos dice que si resolvemos el problema

$$\int \frac{1}{e^{\ln u}+1}\frac{1}{u}du = \int \frac{1}{u(u+1)}du$$

entonces tendremos una solución de nuestro problema. Escribimos

$$\int \frac{1}{u(u+1)}du = \int \frac{1}{u} + \frac{-1}{u+1}du = \ln u - \ln(u+1) = \ln(\frac{u}{u+1}).$$

Ahora como $g^{-1}(x) = e^x$, tenemos que la solución de nuestro problema es

$$\ln(\frac{e^x}{1+e^x}).$$

(**Notación heurística:**) también podemos escribir

$$\int \frac{dx}{e^x+1}$$

haciendo el cambio de variable $x = \ln(u)$, así $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u}$ y $dx = \frac{1}{u}du$

$$= \int \frac{1}{e^{\ln u}+1}\frac{1}{u}du = \int \frac{1}{u(u+1)}du$$

como antes resolvemos esta integral

$$= \ln(\frac{u}{u+1})$$

y deshaciendo el cambio ($x = \ln u$ luego $u = e^x$ )tenemos la solución

$$= \ln(\frac{e^x}{1+e^x})$$

□

**Ejercicio. 1.** $\int \tan(\sqrt{x-1})\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx.$

**Demostración:** Como la derivada de $g(x) = \sqrt{x-1}$ es $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{x-1}$ y así $du = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$ y tenemos

$$\int \tan(\sqrt{x-1})\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int 2\tan u du = -\int 2\frac{-\operatorname{sen} u}{\cos u}du$$

si pensamos que la derivada del coseno es el menos seno (de hecho estamos haciendo otro cambio de variable)

$$= -2\ln(\cos u) = -2\ln(\cos(\sqrt{x-1})),$$

la última igualdad se obtiene después de deshacer el primer cambio de variable □

**Ejercicio. 2.** $\int \frac{\arccos(\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

**Demostración:** Por un lado $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ y por otro $\sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}$. Luego si hacemos el cambio de variable $u = \arccos(\frac{x}{2})$, entonces $du = \frac{-1}{2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}dx$, y así

$$\int \frac{\arccos(\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int -udu = -\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{2}(\arccos(\frac{x}{2}))^2$$

□

**Ejercicio. 3.** $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx.$

**Demostración:** En ese caso vamos a pensar en el cambio de variable $x = \tan u$ y así $dx = 1+\tan^2 udu$. Luego

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2 u+1}}{\tan^2 u}(1+\tan^2 u)du$$

como $\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$ y $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$ tenemos

$$= \int \frac{1}{\cos u}(1 + \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u})du = \int \frac{1}{\cos u} + \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}du$$

usamos que $\int \frac{1}{\cos u}du = \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})|$ (comprobar derivando) tenemos

$$= \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})| - \frac{1}{\operatorname{sen} u}$$

deshaciendo el cambio $u = \arctan x$

$$= \ln|\tan(\frac{\arctan x}{2} + \frac{\pi}{4})| - \frac{1}{\operatorname{sen}(\arctan x)}.$$

Obsevemos que tanto para elegir el cambio de variable, como para demostrar que $\int \frac{1}{\cos u}du = \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})|$ se necesita de una pericia que quizas queda fuera del alcance de este artículo. $\square$

**Teorema. 1.** ***(Fórmula de Sustitución o del Cambio de Variable).*** *Si $f$ y $g'$ son funciones continuas, entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b (f \circ g)(x)g'(x)dx.$$

**Demostración:** Por ser $f$ continua admite una primitiva, la llamamos $F$. Entonces por la Regla de Barrow

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por otro lado $(F \circ g)'(x) = (f \circ g)(x)g'(x)$, luego de nuevo por la Regla de Barrow

$$\int_a^b (f \circ g)(x)g'(x) = F \circ g(b) - F \circ g(a),$$

lo que prueba la igualdad. $\square$

## Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
*Email address*: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`