ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LA FUNCIÓN f VISTA A TRAVÉS DE f' Y f''.

Dada una **función** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, podemos considerar su función **derivada** $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta función a su vez puede ser derivable, y tendremos su derivada $(f')' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que escribimos por f'' y llamamos **derivada segunda** de la función f.

El estudio de f' y f'' nos da información sobre f, como vamos a ver.

Ejemplo. 1. *Si* $f(x) = x^3 + x + 1$, *entonces* $f'(x) = 3x^2 + 1$ *y* $f''(x) = 6x$.

Observación. 1. *Si un fenómeno físico viene dado por una función* $f(t)$, *donde* t *representa el tiempo, entonces* f' *es la velocidad del proceso y* f'' *es la aceleración del mismo.*

Estudio del crecimiento de una función.

Una característica importante de las funciones es su **crecimiento**. En concreto:

Definición. 1. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función.*

a: *Se dice que* f *es* ***monótona creciente*** *si para todo* $x, y \in Domf$ *de modo que* $x < y$, *se tiene que*

$$f(x) \leq f(y).$$

b: *Se dice que* f *es* ***monótona decreciente*** *si para todo* $x, y \in Domf$ *de modo que* $x < y$, *se tiene que*

$$f(x) \geq f(y).$$

□

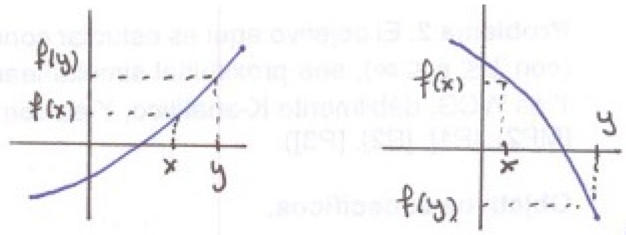

FIGURA 1. Funciones monótonas.

Una función no tiene por que tener un crecimiento único. Es decir, en parte de su dominio puede crecer y en parte decrecer. Esto se puede descubrir mirando el signo de su derivada si es una función derivable.

Teorema. 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).*

a:
- *Si $f'(c) > 0$, para todo $c \in (a,b)$, entonces f es **creciente** en $[a,b]$.*
- *Si f es creciente en $[a,b]$, entonces $f'(c) \geq 0$ para todo $c \in (a,b)$.*

b:
- *Si $f'(c) < 0$, para todo $c \in (a,b)$, entonces f es **decreciente** en $[a,b]$.*
- *Si f es decreciente en $[a,b]$, entonces $f'(c) \leq 0$ para todo $c \in (a,b)$.*

Demostración: Dejamos **b)** como ejercicio, se hace de la misma manera que la parte **a).**

Sean $x < y$ elementos de $[a,b]$. Por el Teorema de Valor Medio existe $c \in (x,y)$ de modo que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0.$$

La desigualdad se tiene ya que por hipótesis $f'(c) > 0$. Luego, despejando, $f(y) \geq f(x)$.

Por otro lado sea $c \in (a,b)$. Si f es creciente, entonces mirando signos

$$\text{para} \quad x > c, \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$$\text{para} \quad x < c, \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Por tanto

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

□

Ejemplo. 2. *Consideramos la función* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Derivando* $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Luego, aplicando el Teorema anterior, la función es decreciente en la semirecta* $(-\infty, 0)$ *y en la semirecta* $(0, \infty)$. *Observemos que la discontinuidad en el punto* $x = 0$ *nos impide afirmar lo mismo en todo el dominio de la función* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

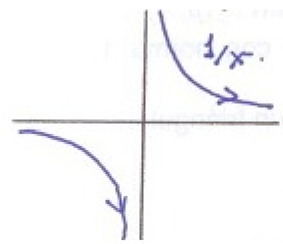

FIGURA 2. Función monótona decreciente.

Teorema. 2. *Sea* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Si para* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *existe* λ *con*

$$f'(x_1) < \lambda < f'(x_2),$$

entonces existe $x_0 \in (a,b)$ *de modo que* $f'(x_0) = \lambda$.

Demostración: Sea $\begin{array}{cccccc} g & : & [x_1, x_2] & \to & \mathbb{R} & \\ & & x & \to & g(x) & = f(x) - \lambda x. \end{array}$ Así $g'(x) = f'(x) - \lambda$. Si suponemos $f'(x) \neq \lambda$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Por un corolario del Teorema del Valor Medio, g tiene que ser inyectiva. Por ser g inyectiva y continua, necesariamente g tiene que ser monótona. Ahora

- si es estrictamente creciente, se tiene que $g'(x) > 0$, pero $g'(x_1) = f(x_1) - \lambda < 0$;
- si es estrictamente decreciente, se tiene que $g'(x) < 0$, pero $g'(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0$.

En cualquier caso llegamos a contradición. Luego se tiene el resultado $\square$

El resultado anterior nos dice que una derivada no puede tener discontinuidades de salto.

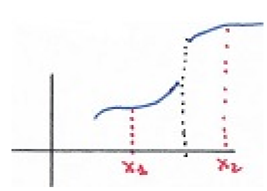

FIGURA 3. **No** es la gráfica de una derivada

Claro que puede haber derivadas que no sean continuas.

Ejemplo. 3. *Se considera la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x & si \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Esta función es continua y derivable. Pero su derivada no es continua.

Demostración: Por un lado $|x^2 \operatorname{sen} 1/x| \leq |x|$. Lo que prueba que f es continua en cero.

Por otro lado, por definición de derivada,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{x} = 0.$$

Ahora f' no es continua en cero ya que no existe el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es