ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

OTROS LÍMITES.

Dada una función f, ésta puede no tener límites en determinados puntos. O no ser finitos. Incluso podemos buscar límites donde la función no está definida, siempre que lo esté "cerca" de donde consideramos el límite.

Ejemplo. 1. *Consideremos la función* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & si \quad x > 0; \\ \frac{x}{x^2+1}, & si \quad x \leq 0. \end{cases}$ *El comportamiento de esta función cerca de cero, o cuando se hace muy grande la x o muy pequeña puede ser "medido", aunque no sirve la definición de límite que conocemos hasta ahora.*

Demostración:

- Si $x > 0$ se acerca a cero, el cociente se hace muy grande. Si $x < 0$, la función tiene a anularse. La función no es continua en $x = 0$.
- Si $x > 0$ y se hace muy grande, el cociente se hace muy pequeño.
- Si $x < 0$ y se hace muy pequeña, grande en valor absoluto, el cociente se hace muy pequeño en valor absoluto.

□

Vamos a dar otras definiciones de límites que tratán de atrapar situaciones como las anteriores.

Límites Infinitos.

Definición. 1. ***(Límites infinitos.)*** *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y consideremos $a \in \mathbb{R}$, de modo que existe $r > 0$ con*

$$(a - r, a + r)\backslash\{a\} \subset Domf.$$

a: *Se dice que el límite de la función f en el punto a es infinito, escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, si para todo $M > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ de modo que si*

$$0 < |x - a| < \delta \quad entonces \quad f(x) > M.$$

b: *Se dice que el límite de la función f en el punto a es menos infinito, escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si para todo $N < 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ de modo que si*

$$0 < |x - a| < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) < N.$$

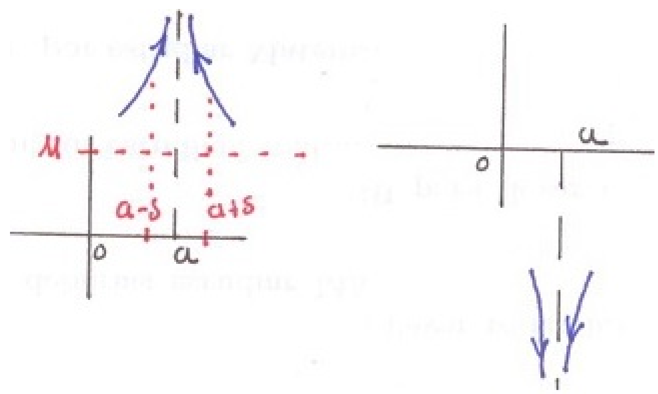

FIGURA 1. Límite infinito en a; y límite menos infinito.

Ejemplo. 2. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

Demostración: Sea $M > 0$, si tomamos $\delta = \frac{1}{M} > 0$, si

$$0 < |x - 0| = |x| < \frac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|} > M$$

$\square$

Con una prueba análoga a la vista en este ejemplo se prueba que

Proposición. 1. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las que existen los límites $\exists \lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\exists \lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces*

a: *si $l > 0$ se sigue que* $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{|g(x)|} = \infty$.

b: *si $l < 0$ se sigue que* $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{|g(x)|} = -\infty$.

Observación. 1. **a:** *Los signos de las funciones f y g son los que determinan el signo del límite.*

b: *Si $l = 0$ estamos ante una* ***indeterminación.***

Ejemplos. 1.
- $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3} x + 3 = 6.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{(x^2 - 9)^3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{(x^2 - 9)^2} = \infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{(x - 3)^3} = \lim_{x\to 3} \frac{x - 4}{(x - 3)^2} = -\infty.$

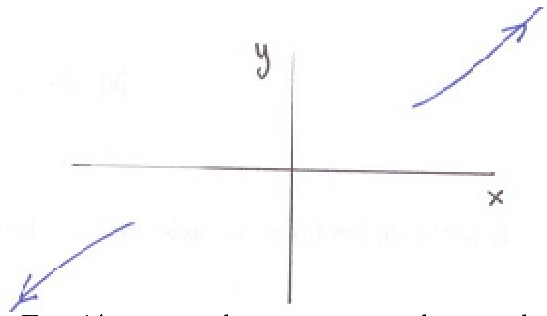

FIGURA 2. Función que se hace muy grande en valor absoluto cuando $|x|$ se hace grande.

Límites en el Infinito. Los siguientes límites indican la tendencia de una función cuando la x se hace muy grande.

Definición. 2. *(**Límites en Infinito**.) Sea una función $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, decimos que **el límite de la función en infinito**, escribimos* $\lim_{x\to\infty} f(x)$, *es*

a: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ de modo que si*

$$x > M, \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon;$$

b: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *si y solo si para todo $N > 0$, existe $M > 0$ de modo que si*

$$x > M, \quad \textit{entonces} \quad f(x) > N;$$

c: $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *si y solo si para todo $N < 0$, existe $M > 0$ de modo que si*

$$x > M, \quad \textit{entonces} \quad f(x) < N.$$

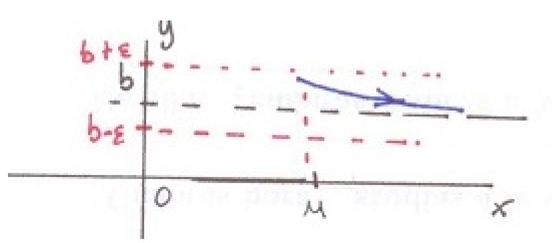

FIGURA 3. Límite en el infinito igual a b

Definición. 3. *(**Límites en menos Infinito**.) Sea una función $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$, decimos que **el límite de la función en menos infinito**, escribimos $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, es*

a: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $M < 0$ de modo que si*

$$x < M, \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon;$$

b: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ *si y solo si para todo $N > 0$, existe $M < 0$ de modo que si*

$$x < M, \quad \textit{entonces} \quad f(x) > N;$$

c: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *si y solo si para todo $N < 0$, existe $M < 0$ de modo que si*

$$x < M, \quad \textit{entonces} \quad f(x) < N.$$

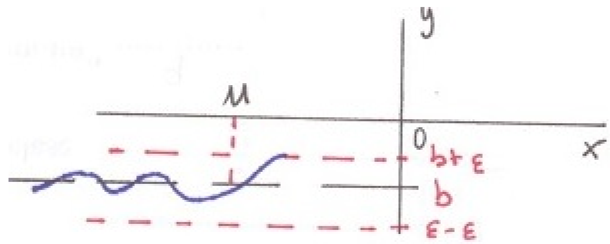

Figura 4. Límite en menos infinito igual a b

Ejemplo. 3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, y consideremos $M = \frac{1}{\epsilon}$. Ahora si

$$x > \frac{1}{\epsilon} \quad \text{entonces} \quad x < \epsilon$$

□

Con una prueba similar se obtiene el siguiente resultado.

Proposición. 2. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las que existen los límites $\lim_{x\to s} f(x) = l \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to s} g(x) = \pm\infty$, entonces*

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

donde s puede ser un número real o más o memos infinito.

Es decir, si el denominador de un cociente se hace muy grande en valor absoluto y el numerador permanece acotado, entonces el cociente tiende a cero. Además como en el caso de límites en puntos finitos se tiene de forma análoga que:

Proposición. 3. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las que existen los límites* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = b_2 \in \mathbb{R}$, *entonces*

- $\lim_{x\to\pm\infty} f + g(x) = b_1 + b_2$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} fg(x) = b_1 b_2$;
- *Si además $b_2 \neq 0$ se tiene que*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Es claro también que en los casos en que b_1 sea más o menos infitito y b_2 acotado, entonces $b_1 + b_2 = b_1$. Si además $b_2 \neq 0$ se tiene que $b_1 b_2 = \mathrm{sign}(b_1)\mathrm{sign}(b_2)|b_1|$.

Ejemplos. 2.

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$, *claro* $x^2 + 1 \to_{x\to\infty} \infty$.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-x)}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} - 1 = -1$.

Indeterminaciones: Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las que existen los límites $\lim_{x\to s} f(x) = b_1$ y $\lim_{x\to s} g(x) = b_2$, donde s es un número real o $\pm\infty$. En los siguientes casos no podemos determinar como va a ser el límite que se propone. En estos casos hablaremos de **Indeterminación.**

- $\displaystyle\lim_{x\to s} \frac{f}{g}(x)$ si $b_1 = b_2 = 0$ o bien $b_1, b_2 = \pm\infty$.
- $\lim_{x\to s}(f + g)(x)$ si $b_1 = \infty$ y $b_2 = -\infty$ o viceversa.
- $\lim_{x\to s} fg(x)$ si $b_1 = \pm\infty$ y $b_2 = 0$ o viceversa.

Observación. 2. *En los casos de indeterminación podemos hacer dos cosas. Manipular convenientemente el límite para resolverlo, lo cuál requiere ingenio. O esperar a ver la* ***Regla de L'Hôpital*** *un poco más adelante cuando estudiemos las derivadas de una función.*

Límites Laterales.

En las definiciones anteriores, no necesitamos que las función esté definida en el punto donde se toma el límite. Solo que lo esté todo lo cerca posible.

Ahora según la topología de la recta podemos acercarnos a un punto en dos direcciones.

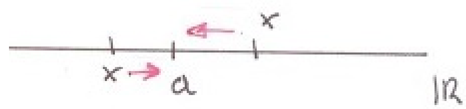

FIGURA 5. Aproximación por al derecha y por la izquierda a un punto a.

Lo anterior nos da pie a dar la definición de **límites laterales**. Son muchas, pero en esencia son las mismas que ya conocemos.

Definición. 4. *Sea una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A: *Sea un punto* $a \in \mathbb{R}$ *de modo que existe* $r > 0$ *con* $(a, a+r) \subset Dom f$.

a_1**:** *Decimos que* b *es el* ***límite por la derecha*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$, *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < x - a < \delta \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon.$$

a_2**:** *Decimos que* ∞ *es el* ***límite por la derecha*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, *si para todo* $M > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < x - a < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) > M.$$

a_3**:** *Decimos que* $-\infty$ *es el* ***límite por la derecha*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, *si para todo* $M < 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < x - a < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) < M.$$

B: *Sea un punto* $a \in \mathbb{R}$ *de modo que existe* $r > 0$ *con* $(a-r, a) \subset Dom f$.

a_1**:** *Decimos que* b *es el* ***límite por la izquierda*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$, *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < a - x < \delta \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon.$$

a_2**:** *Decimos que* ∞ *es el* ***límite por la izquierda*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$, *si para todo* $M > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < a - x < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) > M.$$

a_3: *Decimos que $-\infty$ es el **límite por la izquierda** de f en a, escribimos $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, si para todo $M < 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que si*

$$0 < a - x < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) < M.$$

Ejemplos. 3.

- *Sea* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1 \\ 2x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ *Entonces* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2$. *Por otro lado* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$. *En este caso es claro que **no** existe el límite de la función en el punto $x = 1$ y por tanto la función **no** es continua en $x = 1$.*
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

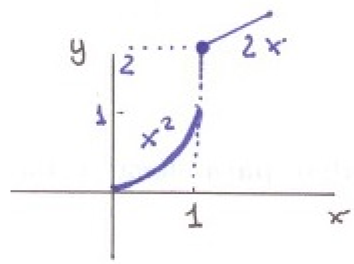

FIGURA 6. Discontinuidad de salto en $x = 1$.

La relación entre límite y límites laterales la da el siguiente Teorema.

Teorema. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea un punto $a \in \mathbb{R}$ de modo que existe $r > 0$ con $(a - r, a + r)\backslash\{a\} \subset Domf$. Son equivalentes:*

- *existe* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *donde* $b \in \mathbb{R}$ *o* $b = \pm\infty$;
- *existen los límites laterales* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *y* $\lim_{x\to a^-} f(x)$, *y ambos son iguales a* b.

Demostración: Ejercicio $\square$

Observación. 3. *La relación de los límites laterales con respecto a las operaciones: suma, producto..etc y respecto de las indeterminaciones es la misma que la de los límites.*

Ejercicio. 1. *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} & si \quad x > 0, \end{cases}$ *tenemos que calcular los límites laterales y determinar donde es continua la función.*

Demostración: Si $a < 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{a}}}{1+e^{\frac{1}{a}}} = f(a)$ ya que la función es un cociente de composiciones de funciones continuas. Observamos que $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ es continua si $x \neq 0$. Lo mismo ocurre si $a > 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1+a^2}}{a^2} = f(a)$. Veamos que ocurre en $a = 0$.

Por un lado $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, y así

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Por el otro lado

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-(1+x^2))}{x^2(1+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Existen los límites laterales, pero son distintos. Por tanto no existe el límite de la función en $x = 0$. La función no es continua en 0. □

Los límites laterales nos permiten dar un clasificación de los puntos donde una función no es continua.

Definición. 5. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea un punto $a \in \mathbb{R}$ de modo que existe $r > 0$ con $(a-r, a+r)\setminus\{a\} \subset Domf$.*

- *Se dice que a es un **discontinuidad evitable** de f, si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, pero no coincide con $f(a)$.*
- *Se dice que a es un **discontinuidad de salto** de f, si existen sus límites laterales en a pero son distintos.*
- *Se dice que a es un **discontinuidad esencial** de f, si no existe alguno de los límites laterales.*

El Ejemplo 3 nos da una función con una discontinuidad de salto en el punto $x = 1$. La función $\frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$.

Ejercicio. 2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función prueba que*

A): *son equivalentes*

1): *existe* $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$;

2): *existe* $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = l$;

B): *son equivalentes*

1): *existe* $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$;

2): *existe* $\lim_{x\to\infty} f(a + \frac{1}{x}) = l$.

Demostración: Veamos una parte. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe un $M > 0$ de mod que si $x > M$, entonces

$$|f(x) - l| < \epsilon.$$

Si $0 < y < 1/M$, entonces $1/y > M$ y

$$|f(\frac{1}{y}) - l| < \epsilon,$$

lo que prueba que $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = l$ $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`