ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

INTEGRAL IMPROPIA. DEFINICIÓN.

La integral de Riemann la hemos definido para funciones acotadas en un intervalo cerrado. Es fácil imaginar situaciones distintas.

Ejemplos. 1. 1.

$$\begin{array}{rcccl} f & : & (0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}; \qquad \text{¿}\textit{qué entendemos por} \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx\text{?}.$$

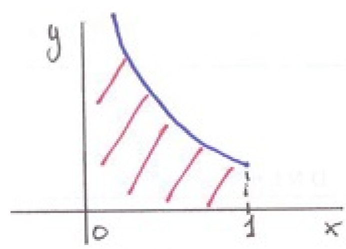

FIGURA 1. Función no acotada sobre un intervalo acotado.

2.

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [1,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = \frac{1}{x^2} \end{array}; \qquad \text{¿}\textit{qué entendemos por} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx\text{?}.$$

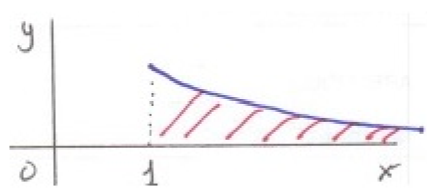

FIGURA 2. Función acotada sobre una semirecta.

3.

$$\begin{array}{rcccl} f & : & (-\infty,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = e^{-x^2} \end{array}; \qquad \text{¿}\textit{qué entendemos por} \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\text{?}.$$

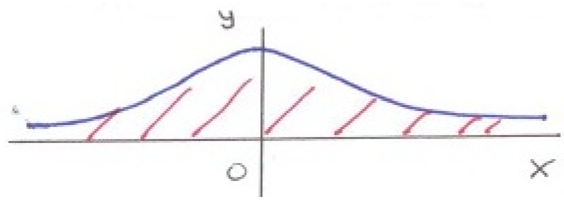

FIGURA 3. Función acotada sobre la recta.

4.

$$\begin{array}{lcccccc} f & : & (1,2) & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & f(x) & = & \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}} \end{array} ; \qquad \text{¿}\textit{qué entendemos por} \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}}dx\text{?}.$$

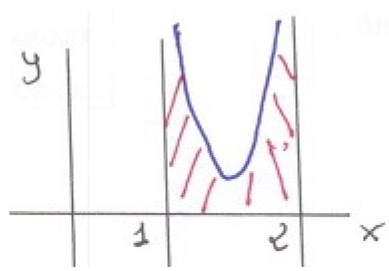

FIGURA 4. Función no acotada sobre un intervalo acotado.

Observamos, en los dos primeros ejemplos, que el problema surge al acercarnos a un extremo del dominio, ya sea por que allí la función no está acotada o por ser infinito el extremo. En los otros dos casos, los problemas están en ambos extremos del dominio.

Para tratar estas situaciones vamos a unir dos cosas que ya conocemos. La **integral de Riemann** y la idea de **límite.** Así procederemos de la siguiente manera.

Ejemplos. 2. 1. *Para la función* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, *continua en* $(0, 1]$, *siempre existe* $\displaystyle\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *para todo* $r \in (0, 1]$.

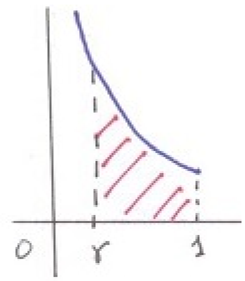

FIGURA 5. Integral de Riemann.

Ahora lo que podemos hacer es acercar r a cero. En concreto

$$\lim_{r\to 0^+}\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{r\to 0^+} 2\sqrt{x}|_r^1 = \lim_{r\to 0^+} 2-2\sqrt{r} = 2,$$

donde en la primera igualdad hemos usado la Regla de Barrow.

2. *Para la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$, continua en $[1,\infty]$, siempre existe $\displaystyle\int_1^s \frac{1}{x^2}dx$ para todo $s>1$.*

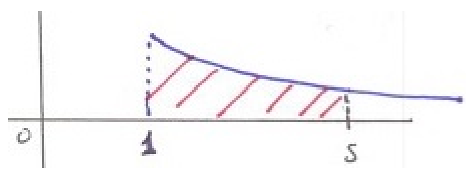

FIGURA 6. Integral de Riemann.

Ahora lo que podemos hacer es acercar s a infinito. En concreto

$$\lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{1}{x^2}dx = \lim_{s\to\infty} \frac{-1}{x}|_1^s = \lim_{s\to\infty} \frac{-1}{s} - \frac{-1}{1} = 1,$$

donde en la primera igualdad hemos usado la Regla de Barrow.

Lo anterior nos da pie a la siguiente definición.

Definición. 1. **a:** *Sea $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, con $b\in\mathbb{R}$ o $b=\infty$, una función que verifica que para todo $s\in[a,b)$ existe la integral de Riemann $\int_a^s f(x)dx$. Se define la* ***integral impropia*** *de f en $[a,b)$ por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s\to b^-}\int_a^s f(x)dx.$$

Si el límite anterior existe, decimos que existe la integral impropia o que la integral es ***convergente***. *En caso contrario, decimos que la integral* ***diverge***.

b: *Sea $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, con $a\in\mathbb{R}$ o $a=-\infty$, una función que verifica que para todo $r\in(a,b]$ existe la integral de Riemann $\int_r^b f(x)dx$. Se define la* ***integral impropia*** *de f en $(a,b]$ por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to a^+}\int_r^b f(x)dx.$$

Si el límite anterior existe, decimos que existe la integral impropia o que la integral es ***convergente****. En caso contrario, decimos que la integral* ***diverge****.*

En los ejemplos anteriores podemos decir que existen las integrales impropias $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$. Observemos que en el primer caso la integral tiene aspecto de integral de Riemann, que no lo sea está implícito pués la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ no está acotada en $(0,1]$. El segundo caso, con el extremo de integración ∞ nos indica claramente que estamos ante una integral impropia.

Hay, claro, integrales impropias no convergentes.

Ejemplo. 1. *Si $p>1$, entonces $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx=\infty$, es decir la integral diverge.*

Demostración: La función $\frac{1}{x^p}$ no está acotada en $(0,1]$, así estamos ante una integral impropia. Por definición

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{r\to 0^+}\int_r^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{r\to 0^+}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}|_r^1 = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{1-p}-\frac{-1}{(p-1)r^{p-1}} = \infty$$

□

En el caso de que tengamos problemas en ambos extremos del dominio de una función, tenemos la siguiente definición de integral impropia.

Definición. 2. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, con $a,b\in\mathbb{R}$ o $a=-\infty$ o $b=\infty$, una función que verifica que para todo $r,s\in(a,b)$ existe la integral de Riemann $\int_r^s f(x)dx$. Se define la* ***integral impropia*** *de f en (a,b) por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to a^+}\int_r^c f(x)dx + \lim_{s\to b^-}\int_c^s f(x)dx,$$

para algún $c\in(a,b)$. Si los dos límites anteriores existen, decimos que existe la integral impropia o que la integral es ***convergente****. En caso contrario, decimos que la integral* ***diverge****.*

Ejemplo. 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx.$

Demostración: Lo que tenemos que calcular gráficamente es

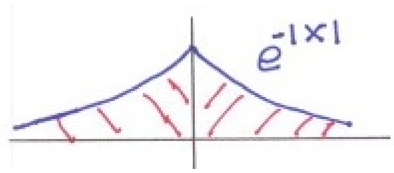

FIGURA 7. Área finita no acotada.

Por la definición anterior tenemos que escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{c} e^{-|x|}dx + \int_{c}^{\infty} e^{-|x|}dx$$

para algún $c \in (-\infty, \infty)$. Dado que la función depende del valor absoluto, nos interesaría que c fuese cero. Observemos que f es una función par y por simetría $\int_{-s}^{0} e^{-|x|}dx = \int_{0}^{s} e^{-|x|}dx$. Veámoslo.

$$\int_{-s}^{0} e^{-|x|} = \int_{-s}^{0} e^{x}dx$$

haciendo el cambio de variable $u = -x$, así $du = -dx$, tenemos

$$= \int_{s}^{0} -e^{-u}du = \int_{0}^{s} e^{-u}du = \int_{0}^{s} e^{-|u|}du.$$

Usaremos lo anterior para ver si existe

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}dx$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 2\lim_{s\to\infty}\int_{0}^{s} e^{-x}dx = 2\lim_{s\to\infty}(-e^{-x}|_{0}^{s} = 2\lim_{s\to\infty}(-e^{-s}+1) = 2$$

□

La pregunta que debemos hacernos es si cualquier otro valor de c en el problema anterior nos hubiese dado el mismo resultado. La respuesta es que si.

Proposición. 1. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$ o $b = \infty$, una función que verifica que para todo $r, s \in (a, b)$ existe la integral de Riemann $\int_{r}^{s} f(x)dx$. Existe la **integral impropia** de f en (a, b) si y solo si*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

para todo $c \in (a, b)$.

Demostración:

FIGURA 8. Demostración sin palabras.

Para convencernos de que es cierto lo que dice la Proposición tomemos $c' < c$ y supongamos que existen $\int_a^{c'} f(x)dx$ y $\int_{c'}^b f(x)dx$, entonces usando las propiedades de la integral de Riemann y la de los límites

$$\int_a^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^b f(x)dx = \lim_{r\to a^+} \int_r^{c'} f(x)dx + \lim_{s\to b^-} \int_{c'}^s f(x)dx$$

$$= \lim_{r\to a^+} \int_r^{c'} f(x)dx) + \lim_{s\to b^-} (\int_{c'}^c f(x)dx + \int_c^s f(x)dx)$$

$$\lim_{r\to a^+} \int_r^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^c f(x)dx + \lim_{s\to b^-} \int_c^s f(x)dx$$

$$= \lim_{r\to a^+} (\int_r^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^c f(x)dx) + \lim_{s\to b^-} \int_c^s f(x)dx$$

$$= \lim_{r\to a^+} \int_r^c f(x)dx + \lim_{s\to b^-} \int_c^s f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

□

Ejercicio. 1. *Tenemos que calcular* $\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^s xdx$, *y comprobar que* ***no*** *existe* $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$.

Demostración: Como $\int_{-s}^s xdx = 0$, para todo $s > 0$, se sigue que $\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^s xdx = 0$. Por otro lado, para toda $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{s\to\infty} \int_c^s xdx = \lim_{s\to\infty} \frac{x^2}{2}|_c^s = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{2} - \frac{c^2}{2} = \infty,$$

luego por definición de integral impropia ésta no existe □

Las siguientes propiedades de la integral impropia se deducen fácilmente de las propiedades de la integral de Riemann y la de los límites.

Proposición. 2. *Sean* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *o* $a = -\infty$ *o* $b = \infty$, *dos funciones para las que existen sus respectivas integrales impropias sobre el intervalo* (a, b). *Entonces*

a: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *para todo* $c \in (a, b)$.

b: $\displaystyle\int_a^b f + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

c: $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración: (Ejercicio) $\square$

Observación. 1. *A diferencia de lo que pasa en la integral de Riemann,* ***no*** *es cierto que si una función tiene integral impropia también la tenga el valor absoluto de la función.*

Ejemplo. 3. *Sea* $f(x) = \begin{cases} -1/(2k-1) & si \quad x \in [2k-1, 2k) \\ \\ 1/(2k) & si \quad x \in [2k, 2k+1), \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, ...$

Demostración: Es claro que $\int_1^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} < \infty$. Sin embargo, al tomar valores absolutos

$$\int_1^\infty |f(x)|dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N |f(x)|dx \geq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Como la serie armónica $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ es divergente, la integral impropia anterior es divergente $\square$

Ejemplo. 4. *Vamos a calcular la integral* $\int_0^1 \ln x dx$*. Vamos a ver como usar de forma extendida la* ***Fómula de Integración por Partes****.*

Demostración:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \ln x dx =$$

aplicando la Regla de Integración por Partes

$$\lim_{r\to 0^+} (x \ln x|_r^1 - \int_r^1 dx =$$

escribiremos, dado por hecho que hay límites subyacentes,

$$x \ln x|_0^1 - \int_0^1 dx =$$

$$0 - 0 - \int_0^1 dx = -1 \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es