AM PRÁCTICA-10

Nombre y apellidos..

1.- Considera el conjunto de matrices

$$\mathbf{R} = \{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{bmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \}$$

con las operaciones usuales de suma $+$ y multiplicación $\times$ entre matrices. Se pide: *i)* demostrar que $(\mathbf{R}, +, \times)$ es anillo conmutativo; determinar los elementos unidad y los divisores de cero en $(\mathbf{R}, +, \times)$.

SEA $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} \in R.$

(*)

$A + B = \begin{pmatrix} a+a' & 0 & 0 \\ 0 & a+a' & 0 \\ b+b' & c+c' & a+a' \end{pmatrix} \in R$ LA SUMA ESTÁ BIEN DEFINIDA

$-A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ -b & -c & -a \end{pmatrix} \in R.$; LUEGO $(R +)$ ES UN GRUPO ABELIANO. YA QUE $R \subseteq M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ GRUPO ABELIANO

$A \cdot B = \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & aa' & 0 \\ ba'+ab' & ca'+c'a & aa' \end{pmatrix} = B\,A \in R$ EL PRODUCTO ESTÁ BIEN DEFINIDO Y ES CONMUTATIVO

$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b'' & c'' & 0 \end{pmatrix} \in R$ y $C \cdot A = 0 \ \forall A \in R$, C DIVISOR DE CERO.

SI $a \neq 0$, A NO ES DIVISOR DE CERO

2.- Prueba que el conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ es un ideal sin divisores de cero del anillo $\mathbb{Z}_{10}$. ¿Es A un cuerpo?

$(\mathbb{Z}_{10} + \times)$ ES UN ANILLO CONMUTATIVO.

$A \subseteq \mathbb{Z}_{10}$; SEA $a, b \in A$, ENTONCES $a - b \in A$ CLARAMENTE

LUEGO $(A +)$ ES UN GRUPO ABELIANO

SI $a, b \in A$, $a = 2k_1$, $b = 2k_2$ $\quad a \cdot b = 2 \cdot 2k_1k_2 \in A.$

LUEGO $(A + \times)$ ES UN ANILLO CONMUTATIVO

(*) TANTO EN 1 COMO EN 2. NO HAY QUE PROBAR MÁS PROPIEDADES QUE SON ANILLOS POR SER SUBCONJUNTOS DE $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ Y $(\mathbb{Z}_{10} + \times)$ QUE SON ANILLOS

NO HAY DIVISORES DE CERO EN A YA QUE SI $a = 2k_1 \neq 0$ y $b = 2k_2 \neq 0$

$ab = 2(2k_1k_2) \in A$ NO NULO. $(5 \nmid 2k_1k_2)$

A NO ES CUERPO. YA QUE $1 \notin A$ Y NINGÚN ELEMENTO DE A TIENE INVERSO

3.- Calcula el cociente y el resto de dividir $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 4$ entre $2x^2 + 3x$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.

$\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 4 & 2x^2+3x \\ \hline -x^2 - 4x^3 & 3x^2+4 \\ 0 \quad 0 \quad 3x^2 + x + 4 & \\ \quad\quad - 3x^2 - 2x & \\ \quad\quad\quad 4x + 4 & \end{array}$$

Así $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 4 = (2x^2+3x)\underbrace{(3x^2+4)}_{\text{cociente}} + \underbrace{4x+4}_{\text{resto}}$

Comprobación:

$$\begin{array}{rl} & 2x^2 + 3x \quad \text{divisor} \\ \times & 3x^2 + 4 \quad \text{cociente} \\ \hline & 3x^2 + 2x \\ x^4 + 4x^3 & \\ \hline x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x & \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} & x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x \\ + & 4x + 4 \quad \text{resto} \\ \hline & x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 4 \ \checkmark \end{array}$$

4.- Resuelve la ecuación $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ en $\mathbb{Z}_5$.
Indicación: si p es primo y $a \neq 0$, entonces $a^{\phi(p)} \equiv 1 \mod p$.

$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, si $a \in \mathbb{Z}_5$ y $a \neq 0$ $a^{\phi(5)} = a^4 \equiv 1$

Si $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ buscamos $a \in \mathbb{Z}_5$ con $p(a) = 0$

$p(0) = 2 \neq 0$ 0 no es raíz

$p(1) = 1 + \underbrace{2+3}_{0} + \underbrace{3+2}_{0} = 1 \neq 0$ 1 no es raíz

$p(2) = 2^4 + 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 2 = 1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 2 \neq 0$ 2 no es raíz

$p(3) = 3^4 + 2\cdot 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 2 = 1 + \underbrace{4 + 2 + 4}_{0} + 2 = 3 \neq 0$ 3 no es raíz

$3^2 \equiv 4 \mod 5$

$3^3 \equiv 2 \mod 5$

$p(4) = 4^4 + 2\cdot 4^3 + 3\cdot 4^2 + 3\cdot 4 + 2 = 1 + 3 + 3 + 2 + 2 = 1 \neq 0$ 5 no es raíz

$4^2 \equiv 1 \mod 5$

El polinomio p no tiene raíces en $\mathbb{Z}_5$, luego $p(x) = 0$ no tiene solución en $\mathbb{Z}_5$.