ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL CONJUNTO DE CANTOR.

Este es un ejemplo de un conjunto singular en $\mathbb{R}$.

Definición. 1. *Llamamos* ***Conjunto de Cartor*** *a*

$$C = \{x \in [0,1] \ : \ x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \ \textit{con} \ a_j \in \{0,2\} \ \}.$$

Estamos considerando los números en $[0,1]$ que en base tres no tienen (o puede obviarse) un 1 en su desarrollo.

Observación. 1. *Sea* $x = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^N}$ *con* $a_j \in \{0,2\}$, *entonces*

$$x \in C$$

Demostración: Claro, ya que sin más que sumar la serie geométrica se tiene que

$$\frac{1}{3^N} = \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} \qquad \square$$

Vamos primero a tratar de visualizar el conjunto C y después veremos las propiedades que lo hacen singular.

Sean para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$c_0 = \{\frac{1}{3}\} \qquad \text{consideramos el intervalo} \qquad C_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

$$c_1 = \{\frac{0}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\} \qquad \text{consideramos la unión de intervalos} \qquad C_1 = (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \bigcup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$c_k = \{\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}} \ \text{con} \ a_j \in \{0,2\}\} = \{b_k^i \ : \ i = 1, 2, .., 2^k\} \qquad \text{consideramos la unión de intervalos}$$

$$C_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} (b_k^i, b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}})$$

Teorema. 1. $\qquad C = [0,1] \setminus (\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k)$.

Demostración: De forma gráfica, que es la más fácil de entender.

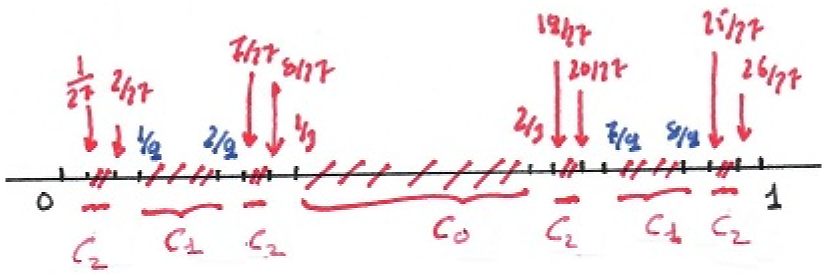

FIGURA 1. Eliminación de intervalos en $[0,1]$.

Observemos que los conjuntos de puntos $c_k = \{\, b_k^1 < b_k^2 < .... < b_k^{2^k} \,\}$ tienen 2^k elementos (tantos como 0's y 2's ponemos poner en k posiciones); los cuáles podemos suponer ordenados. Además como

$$b_k^i < b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}} < b_k^{i+1} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq i < 2^k$$

la unión $C_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} (b_k^i, b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}})$ es disjunta.

Por otro lado la unión $\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$ también es disjuntta ya que

$$C_n \bigcup C_m = \emptyset \qquad \text{si} \qquad n < m.$$

Claro,

$$(b_n^i, b_n^i + \frac{1}{3^{n+1}}) \bigcap (b_m^r, b_m^r + \frac{1}{3^{m+1}}) = \emptyset \qquad \text{para todo} \qquad i, r;$$

ya que para todo $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in (b_n^i, b_n^i + \frac{1}{3^{n+1}})$, el primer $a_j = 1$ es necesariamente para $j = n+1$ y sin embargo para todo $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in (b_m^r, b_n^r + \frac{1}{3^{m+1}})$, el primer $a_j = 1$ es necesariamente para $j = m+1$. Luego $x \neq y$.

Observemos que de la Observación 1. se sigue que

$$\{ b_k^i \;:\; i = 1, 2, ..., 2^k \text{ y } k = 0, 1, 2, , , , \} \subset C.$$

Probemos ya que $\qquad C = [0,1] \setminus (\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k)$.

- Si $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$, entonces para algún k, tenemos que $y \in C_k$ y por tanto

$$a_{k+1} = 1 \qquad \text{y existe} \qquad a_m \neq 0 \qquad \text{con} \qquad \text{m} > j.$$

Luego $y \notin C$.

- Si $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in [0,1] \setminus (\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k)$, ninguno de los a_j es igual a 1, de lo contrario estaría en algún C_k, luego $y \in C$. Más preciso, si
$$x = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}} + \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{a_j}{3^j},$$
donde $a_{k+1} = 1$ es el primer uno que aparece en la serie, entonces como
$$\sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} < \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^{k+1}},$$
se tendría que $x \in (\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}}, \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}}) \subset C_k$
$\square$

Propiedades del conjunto de Cantor.

1. *C es cerrado.*

   Demostración: C_k es abierto por ser unión de intervalos abiertos. $\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$ es abierto por ser unión de abiertos. El complementario de un abierto
$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$$
   es un cerrado. La intersección finita de cerrados es un cerrado, así
$$[0,1] \bigcap \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k \right) = [0,1] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k = C$$
   es un cerrado $\square$
2. *C es compacto.*

   Demostración: Claro, es un cerrado y acotado.
3. *Si $x, y \in C$ con $x < y$, entonces existe $z \notin C$ tal que $x < z < y$. Es decir, C es totalmente desconexo.*

   Demostración: Sean $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ e $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j}$, con $a_j, b_j \in \{0,2\}$. Si $x < y$, existe un primer j_0 de modo que
$$a_{j_0} < b_{j_0} \qquad \text{y así} \qquad a_{j_0} = 0 < 2 = b_{j_0}.$$
   Ahora es claro que
$$x < \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{j_0}} + \frac{1}{3^{j_0+1}} = z < \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^{j_0}} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j} = y \qquad \square$$

4. *C no tiene puntos aislados.*

Demostración: Sea $x \in C$ con $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$, $a_j \in \{0,2\}$. Sea $\delta > 0$. Tenemos que probar que

$$C \cap ((x-\delta, x+\delta) \backslash \{x\}) \neq \emptyset.$$

Sea el j_0 de modo que $\frac{1}{3^{j_0}} < \delta$, entonces

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} < \sum_{j=1}^{j_0+1} \frac{a_j}{3^j} + \sum_{j=j_0+2}^{\infty} \frac{2}{3^j} = z = \sum_{j=1}^{j_0+1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{j_0+1}} < x + \delta.$$

Claramente $z \in C \backslash \{x\}$ $\square$

5. *C tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$.*

Demostración: Como vimos en el **Apéndice** Cardinalidad de los números Reales, el Cardinal del intervalo $(0,1)$ es él mismo que él de $\mathbb{R}$. Por tanto $[0,1]$ tiene el cardinal de $\mathbb{R}$. Con esto, es suficiente con probar que existe una biyección entre C y el intervalo $[0,1]$. Vamos a definirla:

$$\begin{array}{lcccc} f_0 & : & C & \rightarrow & [0,1] \\ & & x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} & \rightarrow & f_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j}. \end{array}$$

Como $a_j \in \{0,2\}$, así $a_j/2 \in \{0,1\}$ y entonces

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j} = f_0(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1;$$

lo que prueba que f_0 está bien definida.

Ahora f_0 es **creciente**, es decir si $x < y$, entonces $f_0(x) < f_0(y)$, lo que nos dice además que f_0 es **inyectiva**. Veámoslo. Sean $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ e $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j}$, con $a_j, b_j \in \{0,2\}$. Si $x < y$, existe un primer j_0 de modo que

$$a_{j_0} < b_{j_0} \qquad \text{y así} \qquad a_{j_0} = 0 < 2 = b_{j_0}.$$

Luego

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{a_j/2}{2^j} + 0 + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j} < \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{a_j/2}{2^j} + \frac{1}{2^{j_0}} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{b_j/2}{2^j} = f_0(y).$$

Ver que f_0 es **suprayectiva** es más sencillo. Si tomamos $y \in [0,1]$, lo podemos escribir como

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{2^j} \qquad \text{con} \qquad b_j \in \{0,1\}.$$

Así es claro que

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2b_j}{3^j}\in C$$

y que $f_0(x)=y$ $\square$.

6. *C tiene medida cero.* La noción de **medida** tiene un amplio recorrido como se puede ver en la asignatura de Teoría de la Medida. Aquí solo vamos a usarla de forma intuitiva, pero que concuerda con lo que más adelante será adecuadamente formalizado.
   - El intervalo $C_0=(1/3,2/3)$ mide $|2/3-1/3|=1/3$ y escribimos $m(C_0)=1/3$
   - Los dos intervalos de C_1 miden $|2/9-1/9|+|8/9-7/9|=2/9$ y escribimos $m(C_1)=2^1/3^2$.
   - Los 2^k intervalos de C_k, que no se solapan, miden
   $$m(C_k)=2^k|b_k^i+\frac{1}{3^{k+1}}-b_k^i|=2^k/3^{k+1}.$$
   - Como los conjuntos C_k son disjuntos, parece razonable pesar que
   $$m(\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k)=\sum_{k=0}^{\infty}m(C_k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{3^{k+1}}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{3^k}=1.$$
   - Como $[0,1]=C\bigcup(\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k)$ unión disjunta, ya que C y $\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k$ no tienen elementos comunes, parece razonable poner
   $$m([0,1])=m(C)+m(\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k).$$
   Como la medida $m([0,1])=1$, se deduce que $m(C)=0$ $\square$

Observación. 2. *Las propiedades* $3),4)$ *y* $5)$ *también las tienen los números irracionales del intervalo* $[0,1]$*, el conjunto* $[0,1]\cap\mathbb{I}$*. Sin embargo,* $[0,1]\cap\mathbb{I}$ ***no*** *es cerrado ya que*

$$\overline{[0,1]\cap\mathbb{I}}=[0,1].$$

Por otro lado se puede probar que $m([0,1]\cap\mathbb{I})=1$*.*

La función de Cantor o Cantor-Lebesgue.

La siguiente curiosa función va unida al conjunto de Cantor. Tendremos en cuenta la función f_0 que hemos definido anteriormenete. Además usaremos que

$$[0,1]=C\bigcup\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k\right),$$

unión disjunta.

Definimos la **función de Cantor** o de Cantor-Lebesgue F_0 por

$$\begin{array}{rcl} F_0 \;:\; [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \to & F_0(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si} \quad x \in C \\ f_0(b_k^i) & \text{si} \quad x \in (b_k^i, b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}}) \subset C_k, \\ \text{para todo} \quad i = 1, 2, .., 2^k & \text{y } k = 0, 1, 2, ... \end{cases} \end{array}$$

Gráficamente

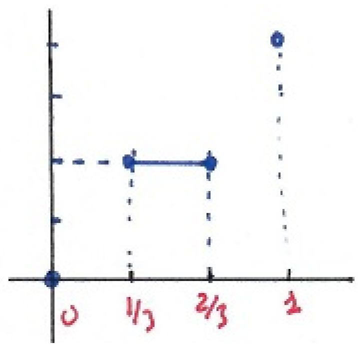

Figura 2. Primera iteración de la F_0.

La segunda iteración seria

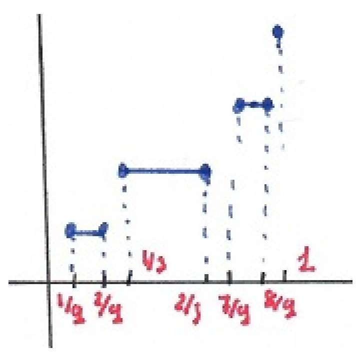

Figura 3

Observemos que la función F_0 verifica que:

- $F_0(b_k^i) = F_0(b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}})$, ya que

$$F_0(b_k^i) = f_0(b_k^i) = f_0(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}}) = f_0(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + 0 + \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{2}{3^j}) =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j/2}{2^j} + 0 + \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j/2}{2^j} + \frac{1}{2^{k+1}} = f_0(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^{k+1}}) = F_0(b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}}).$$

- F_0 es **creciente**, por serlo f_0 y ser constante en cada $[b_k^i, b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}}]$.
- $F_0([0,1]) = [0,1]$, por ser f_0 suprayectiva.
- F es **continua** en todo $[0,1]$, ya que al ser creciente solo puede tener discontinuidades de salto (ver apéndice de Funciones Monótonas). Pero vemos que no las tiene.
  - Si $x \notin C$, entonces x pertenece a un intervalo abierto donde F_0 es constante y por tanto F_0 es continua en x.
  - Si $x = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^N} \in C$, entonces $z_n = x + \frac{1}{3^n} \to_{n\to\infty} x$ y así

$$F_0(z_n) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_j/2}{2^j} + \frac{1}{2^N} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = F_0(x) + \frac{1}{2^{n+2}} \to_{n\to\infty} F_0(x),$$

  luego no puede haber discontinuidad de salto.
  - Si Si $x = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^N} \in C$, tomamos $z_n = x - \frac{1}{3^n}$ y se procede igual que en el caso anterior.
  - Si $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in C$, entonces se tomo $z_n = x + \frac{1}{3^n}$ si $a_n = 0$ o $z_n = x - \frac{1}{3^n}$ si $a_n = 2$. Esta sucesión $(z_n)_n$ converge a x, así como la sucesión $(F_0(z_n))_n$ converge a $F_0(x)$, luego no puede haber discontinuidades de salto □

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es