ÁLGEBRA LINEAL

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.

Como con las funciones reales, se pueden definir funciones complejas de variable compleja.

Definición 1. *Una aplicación f de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \to & f(z) \end{array}$$

*se le llama **función de variable compleja**.*

Ejemplo 1. *Ejemplos de funciones de variable compleja son*

- ***funciones polinómicas**:*

  $$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + ... + \alpha_1 z + \alpha_0$$

  donde $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ (en particular pueden ser todos o algunos reales).
- ***funciones racionales**:*

  $$f(z) = \frac{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + ... + \alpha_1 z + \alpha_0}{\beta_m z^m + ... + \beta_1 z + \beta_0}$$

  donde $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_0, ..., \beta_m \in \mathbb{C}$ (en particular pueden ser todos o algunos reales).

Otro ejemplo importante de función de variable compleja es la exponencial compleja.

Definición 2. *Para todo número complejo $z \in \mathbb{C}$ se define la función **exponencial compleja** por*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Tomando módulos $|z|$ en la serie y aplicando el criterio del cociente, vemos que la serie que define a la exponencial compleja converge absolutamente para todo z y por tanto es convergente. También se puede ver que la convergencia es uniforme en todo conjunto acotado de $\mathbb{C}$.

La convergencia (o Topología) en $\mathbb{C}$ es la misma que la que tenemos en el plano $\mathbb{R}^2$ y viene dada por el **módulo**, la herramienta que nos permite medir distancias. El módulo nos permite dar la noción de límite y también de derivada.

Definición 3. *Dada una función f de variable compleja y un punto $z_0 \in Dom f$ de su dominio, se dice que*

- *b es el* ***límite de la función*** *en el punto z_0, (escribimos $\lim_{z \to z_0} f(z) = b$) si y solo si*

$$\text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ de modo que si } 0 < |z - z_0| < \delta,$$

  entonces
$$|f(z) - b| < \epsilon.$$

- *f es* ***derivable*** *en el punto z_0 si existe el límite*
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0};$$
  si existe este límite lo denotamos por $f'(z_0)$.

Todo lo anterior es análogo a lo visto para funciones reales y se puede probar que las fórmulas de derivación son las mismas.

Ejemplos 1. *Sean f y g funciones de variable compleja derivables, entonces:*

- $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- *Si $P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + ... + \alpha_1 z + \alpha_0$, entonces*
$$P'(z) = n\alpha_n z^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} z^{n-2} + ... + \alpha_1.$$
- *Si $f(z) = e^z$, entonces*
$$f'(z) = e^z.$$
  Claro, como la serie de potencias, que define e^z, converge uniformemente, se puede derivar término a término y lo que queda es la misma serie.
- *........etc.*

Las funciones de variable compleja derivables (también se llaman **Holomorfas**) tienen buenas propiedades. Por ejemplo, si una función f es derivable en un disco de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$,

$$D(z_0, r) = \{ \ z \in \mathbb{C} \quad : \quad |z - z_0| < r \ \},$$

entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \qquad \text{para todo} \qquad z \in D(z_0, r).$$

Es decir, si f es derivable, se puede probar que f tiene derivadas de todos los ordenes y además que coincide con su serie de Taylor (esto se estudiará en los cursos de Variable Compleja).

También se verá que la exponencial compleja tiene las propiedades de la exponencial real:

$$e^{z+w} = e^z e^w \qquad \text{para todo} \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Ahora dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, por al propiedad anterior, se tiene que

$$\boxed{e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)}.$$

La última igualdad se debe a la Fórmula de Euler que probamos a continuación.

Proposición 1. (**Fórmula de Euler**) *Si $t \in \mathbb{R}$ entonces*

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

*D*emostración:

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ii^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

donde hemos usado que $i^2 = -1$ y las expresiones en serie de Taylor de las funciones coseno y seno $\square$

De aquí, se deduce la siguiente curiosidad (¿curiosidad o la perfección del universo?).

Observación 1. $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Las siguientes propiedades de la exponencial compleja nos serán útiles a la hora de calcular, por ejemplo transformadas de Fourier.

Proposición 2.
1. $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$
2. $|e^{it}| = 1$
3. $\overline{e^{it}} = e^{-it}$
4. $\cos nt = \dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2}$ *y* $\operatorname{sen} nt = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$
5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{e^{int}}{in} \Big|_{-\pi}^{\pi}.$

*D*emostración: 1 y 2 salen directamente de la fórmula de Euler. Para ver 3

$$\overline{e^{it}} = \overline{\cos t + i \operatorname{sen} t} = \cos t - i \operatorname{sen} t = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) = e^{-it}$$

Veamos la primera igualdad de 4; la segunda queda como ejercicio.

$$\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}=\frac{cosnt+i\operatorname{sen}nt+\cos nt-i\operatorname{sen}nt}{2}=\cos nt.$$

Una forma de ver 5 es la que sigue

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\cos ntdt+i\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}ntdt$$

$$\frac{\operatorname{sen}nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+i(\frac{-\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi})=\frac{i\operatorname{sen}nt}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi}+(\frac{\cos nt}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi})=\frac{e^{int}}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi}\ \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`