ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL TEOREMA DE TAYLOR.

Al tomar el valor del polinomio de Taylor $P_{n,a}(x)$ en lugar del valor de la función $f(x)$ cometemos un error. En lo que sigue vamos a determinar tal error.

Definición. 1. *Sea f una función para la que existe su polinomio de Taylor de grado n centrado en a, $P_{n,a}(x)$. Se define el* ***resto*** *de orden n en a como*

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x) =$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - ... - \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Observación. 1. *El error que se comete al tomar $P_{n,a}(x)$ en lugar de $f(x)$ es precisamente*

$$|R_{n,a}(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|.$$

El Teorema siguiente lo que nos da es una caracterización de este error.

Teorema. 1. ***(de Taylor**). Sea $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ una función $n+1$-veces derivable en el intervalo $[a,x]$.*

a): *Fórmula del Resto de Cauchy:*

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a),$$

para algún $t \in (a,x)$.

b): *Fórmula del Resto de Lagrange:*

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{para algún} \quad t \in (a,x).$$

c): *Fórmula del Resto Integral:* *si además $f^{n+1)}$ es integrable en $[a,x]$,*

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Un resultado análogo se puede probar en el intervalo $[x, a]$.

Demostración: Como existen las derivadas de f en $[a, x]$, podemos escribir para cada $t \in (a, b)$

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + ... + \frac{f^{n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x) \qquad (*)$$

Consideramos las funciones:

$$s(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(t)}{k!}(x-t)^k = R_{n,t}(x)$$

y

$$g(t) = (x-t)^{n+1}.$$

Estas funciones son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x), en particular

$$s'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

poniendo $j = k-1$

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j$$

$$= -\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Y

$$g'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

Además $s(x) = g(x) = 0$ y $s(a) = R_{n,a}(x)$ y $g(a) = (x-a)^{n+1}$.

a) Ahora, aplicando el Teorema del Valor Medio a la función s sobre $[a, x]$, existe $t \in [a, b]$ de modo que

$$\frac{s(x) - s(a)}{x - a} = s'(t) = -\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Así

$$-s(a) = -\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$$

y por tanto

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a).$$

b) Si aplicamos a s y g el Teorema del Valor Medio de Cauchy, existe $t \in (a, x)$ de modo que

$$\frac{s(x) - s(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{s'(t)}{g'(t)} = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

y despejando $s(a)$

$$s(a) = R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

c) Esta parte es una simple aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo

$$s(x) - s(a) = \int_a^x s'(t)dt$$

y sustituyendo

$$-s(a) = -R_{n,a}(x) = -\int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

$\square$

Observación. 2. *$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$. Si*

$$R_{n,a}(x) \to_{n\to\infty} 0,$$

entonces

$$P_{n,a}(x) \to_{n\to\infty} f(x).$$

Lo cuál nos daría una mejor aproximación de $f(x)$ al aumentar el grado del polinomio de Taylor.

Ejemplo. 1. *Vamos a evaluar el error máximo que cometemos al tomar $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ en lugar de $\sqrt{1+x}$ para $x \in [-0,2\,,0,2]$.*

Demostración: El error que cometemos es

$$|\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8})| = |f(x) - P_{2,0}(x)| = |R_{n,0}(x)|$$

aplicando la fórmula integral del resto

$$= |\int_0^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 dt|$$

como $(\sqrt{1+x})''' = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$

$$\leq \int_0^x |\frac{3}{8}\frac{(1+x)^{-\frac{5}{2}}}{2}||(x-t)|^2 dt$$

como $0,8 \leq 1+x$ y $|x-t| < 0,2$ para todo $x \in [-0,2\,,\,0,2]$

$$\leq 0,2 \times \frac{3}{16}\frac{1}{(0,8)^{\frac{5}{2}}}(0,2)^2 = \frac{2^3}{10^3}\frac{3}{2^4}\frac{10^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{15}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\frac{1}{2^{\frac{17}{2}}} \leq \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}.$$

Luego al tomar $P_{2,0}(x)$ en lugar de $\sqrt{1+x}$ cometemos un error menor que 4 milésimas ($\frac{1}{256} < \frac{4}{1000}$) siempre que $x \in [-0,2\,,\,0,2]$ $\square$

Ejemplo. 2. *Vamos a explicar la siguiente desigualdad*

$$|\operatorname{sen}(a+h) - (\operatorname{sen} a + h\cos a)| \leq \frac{1}{2}h^2.$$

Demostración: Consideramos $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $a \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$P_{1,a}(x) = \operatorname{sen} a + \cos a(x - a).$$

Así

$$|\operatorname{sen}(a+h) - (\operatorname{sen} a + h\cos a)| = |f(a+h) - P_{1,a}(a+h| = |R_{1,a}(a+h)|$$

tomando la fórmula integral del resto

$$= |\int_a^{a+h} \frac{\operatorname{sen}''(t)}{1}(a+h-t)dt| \leq \int_a^{a+h} |\frac{\operatorname{sen}''(t)}{1}||(a+h-t)|dt$$

como la derivada segunda del seno es otro seno y ésta es una función acotada

$$\leq \int_a^{a+h} |(a+h-t)|dt = -\frac{|(a+h-t)|^2}{2}|_a^{a+h} = \frac{h^2}{2}$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es