ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LA SERIE DE TAYLOR.

Si hacemos crecer el grado del polinomio de Taylor de una función, esto nos lleva a una serie.

Definición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que existe $f^{k)}(a)$ para $a \in Domf$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Se llama **Serie de Taylor** de f centrada en a a la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Proposición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que existe $f^{k)}(a)$ para $a \in Domf$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Si*

$$R_{n,a}(x) \to_{n\to\infty} 0,$$

entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Demostración:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n,a}(x) \to_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

□

En algunos casos podemos esperar escribir una función como una serie. La pregunta es ¿cuándo se produce esto? ¿En que parte del dominio de la función?

Cuando estudiabamos series, anunciamos que algunas funciones se podían escribir en forma de serie. Recordemos aquellos casos.

Ejemplo. 1. $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración: Para $f(x) = e^x$ tenemos que

$$|f(x) - P_{n,0}(x)| = |e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| = |R_{n,0}(x)|$$

usando la fórmula integral del resto

$$= |\int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt| \leq \max\{1, e^x\} \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt$$

integrando

$$= \max\{1, e^x\}\left(\frac{|x-t|^{n+1}}{(n+1)!}\right|_0^x = \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ahora si $x \in [-M, M]$, para cualquier $M > 0$, entonces

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \leq \max\{1, e^M\} \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \to_{n\to\infty} 0$$

(la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ es convergente, por tanto sus términos convergen a cero, como vimos en el Tema de Serie). Por tanto

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

□

Ejercicio. 1. *Queremos calcular las series de Taylor centradas en $a = 1$ de las funciones $f(x) = e^x$ y de $g(x) = e^x(x-1)^5$.*

Demostración: Sabemos que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. También que

$$e^x = ee^{x-1} = e\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k$$

lo que resuelve el primer caso.

Por otro lado,

$$g(x) = e^x(x-1)^5 = (x-1)^5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{e}{(k-5)!}(x-1)^k,$$

lo que resuelve el segundo caso □

Observación. 1. *En el ejercicio anterior hemos usado implícitamente que si un polinomio P tiene grado n y*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = 0 \quad \textit{para todo} \quad k \leq n,$$

entonces $P = P_{n,a}$.

Ejemplo. 2.
- $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración: Para $f(x) = \operatorname{sen} x$ tenemos que

$$|f(x) - P_{n,0}(x)| = |\operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}| = |R_{n,0}(x)|$$

usando la fórmula integral del resto

$$= |\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{2n+2)} t}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} dt| \leq \int_0^x \frac{|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!} dt$$

integrando

$$= (\frac{|x-t|^{2n+2}}{(2n+2)!}|_0^x = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Ahora si $x \in [-M, M]$, para cualquier $M > 0$, entonces

$$|\operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}| \leq \frac{M^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow_{n\to\infty} 0$$

(la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ es convergente, por tanto sus términos convergen a cero, como vimos en el Tema de Serie). Por tanto

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

La igualdad del coseno con su serie de Taylor se prueba de igual manera
□

Ejercicio. 2. *Vamos a calcular* $\operatorname{sen} 1$ *con un error menor que* 10^{-3}.

Demostración: Hemos visto que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|\operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

en particular

$$|\operatorname{sen} 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}| \leq \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Ahora probando, si $n = 2$, entonces $(2n+2)! = 6 \times \times 5 \times ... \times 2 = 720$. Así $n = 3$

$$\frac{1}{(2 \times 3 + 2)!} = \frac{1}{8 \times 7 \times 720} < \frac{1}{1000.}$$

Luego

$$\operatorname{sen} 1 \simeq 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}$$

con un error menor que la milésima $\square$

No podemos esperar que las series de Taylor representen a cualquier función. Los siguientes ejemplos van en esa línea. Además vamos a ver otras formas de calcular polinomios de Taylor y restos.

Ejemplo. 3. $\arctan x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ *si* $x \in (-1,1)$.

Demostración: Sea $f(x) = \arctan x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} =$$

repitiendo la misma idea

$$= 1 - \frac{x^2+x^4-x^4}{1+x^2} = 1-x^2+\frac{x^4}{1+x^2} = ... = 1-x^2+x^4-....(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}.$$

Como

$$lim_{x\to a}\frac{f'(x)-(1-x^2+x^4-....(-1)^k x^{2k})}{x^{2k}} = lim_{x\to a}\frac{\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}}{x^{2k}} = 0,$$

de la Observación que hicimos respecto de este tipo de límites cuando definimos los polinomios de Taylor (ver artículo Definición de Polinomios de Taylor), se sigue que

$$P_{2n,0} = 1-x^2+x^4-....(-1)^k x^{2k}....(-1)^n x^{2n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$$

y

$$R_{2n,0}(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

para la función $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

¿Cómo calculamos los polinomios de Taylor y los restos para la función $\arctan x$? La respuesta parece sencilla, integrando. Según el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+s^2}ds = \int_0^x \sum_{k=0}^{n}(-1)^k s^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}s^{2n+2}}{1+s^2}ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}s^{2n+2}}{1+s^2}ds.$$

Lo que nos dice que

$$P_{2n+1,0} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

y

$$R_{2n+1,0}(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}s^{2n+2}}{1+s^2}ds.$$

para la función $f(x) = \arctan x$.

Ahora si $x \in (-a, a)$ con $0 < a < 1$, entonces

$$|\arctan x - P_{2n+1,0}(x)| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} s^{2n+2}}{1+s^2} ds \right| \leq \int_0^a |s|^{2n+2} ds = \frac{a^{2n+3}}{2n+3} \to_{n\to\infty} 0.$$

Por otro lado, si $x > 1$, entonces

$$|\arctan x - P_{2n+1,0}(x)| \geq \frac{1}{2x^2} \int_0^x s^{2n+2} ds = \frac{x^{2n+3}}{4n+6} \to_{n\to\infty} \infty.$$

Lo que prueba el ejercicio

$\square$

Ejercicio. 3. *Calcula la serie de Taylor de la función* $f(x) = \ln(x+1)$*. Prueba que esta seri converge para* $x \in (-1, 1)$*.*

Ejercicio. 4. *Consideramos la función*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & si \quad x \neq 0 \\ 0, & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Prueba que las derivadas sucesivas de f *en cero son nulas, es decir para todo* $k \in \mathbb{N}$*, se tiene* $f^{k)}(0) = 0$*. Luego la serie de Taylor es la serie nula, que solo coincide con* f *en* $x = 0$*, ya que* $e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$*.*

(**Indicación:** Prueba que $\lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h^n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.)

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es