AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

SUCESIONES DE FUNCIONES

Ya conocemos el concepto de convergencia de una sucesión de números. Decíamos que dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, ésta convergía a un número x (o límite de la sucesión) y escribiamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{o} \qquad x_n \to_{n\to\infty} x$$

si para todo para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que si $n > n_0$ entonces ocurre siempre que $|x - x_n| < \epsilon$.

Ejemplos 1. *a)* $\frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$ *b)* $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \to_{N\to\infty} e$

c) El método de las tangentes de Newton nos permitía encontrar una sucesión que converge a la solución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$

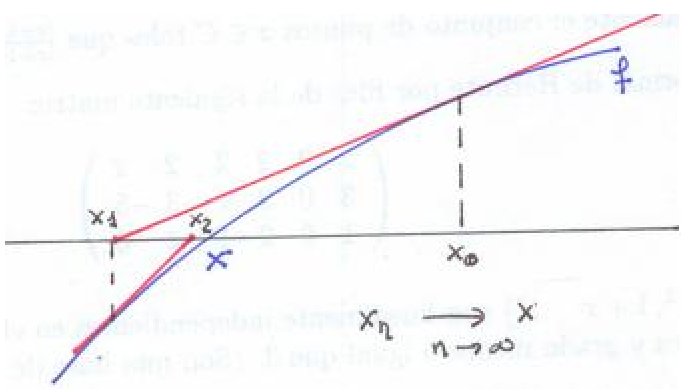
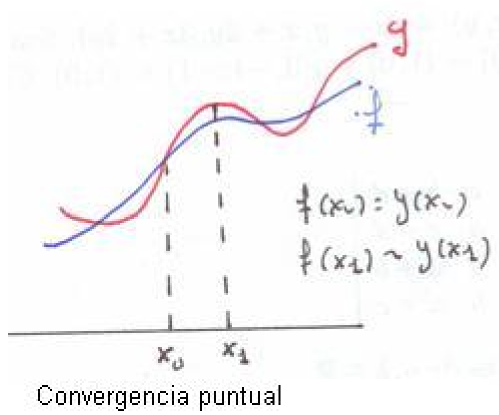
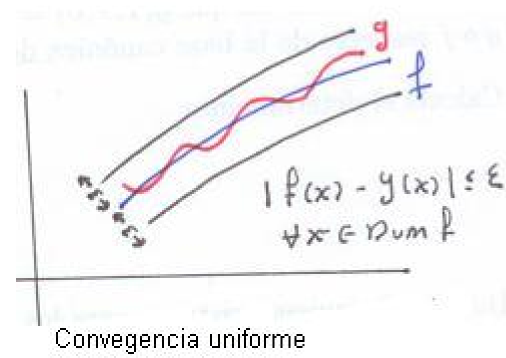


Figura 1. Tangentes de Newton

Otro problema distinto, más general, es él de aproximar una función dada f por otras f_n, que han de ser más sencillas y que se *acercan* a f cuando n se hace grande. La primera cuestión que se plantea es que significa que una función este cerca de otra o equivalentemente como medimos la *distancia* entre dos funciones. Veamos los siguientes ejemplos gráficos.

Ejemplos 2.





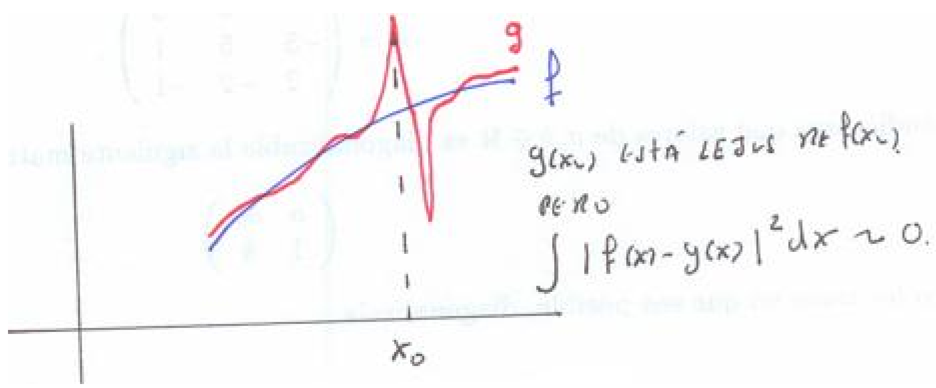


Figura 2. Convergencia en media cuadrática

Vamos a estudiar los dos primeros tipos de convergencias. La convergencia en media cuadrática es sin embargo la más apropiada para estudiar señales (de alguna forma la integral de la función al cuadrado mide la energía de la señal).

Definición 1. *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas sobre un mismo dominio $A \subset \mathbb{R}$ (podemos pensar que A es un intervalo).*

1. *Decimos que la función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ si para todo $x \in A$ se verifica que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

2. *Decimos que la función* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es el límite uniforme de la sucesión* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un natural* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de manera que*

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \qquad \textit{para todo} \qquad x \in A$$

(o también, equivalentemente, que $\sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in A\} < \epsilon$*).*

Ejemplo 1. *Consideramos la sucesión de funciones* $f_n(x) = x^n$ *donde* $x \in A = [0, 1]$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Las gráficas de las funciones de la sucesión son del tipo*

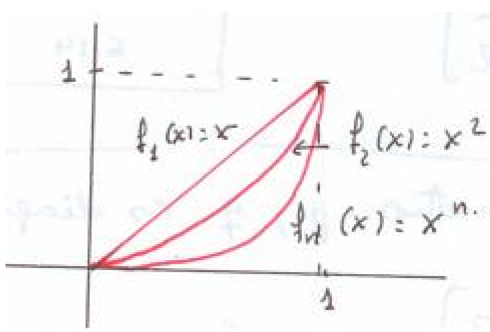


FIGURA 3. Gráficas de f_1,f_2,..,f_n

En primer lugar calculamos su límite puntual

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

luego la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ es el límite puntual de la sucesión. Sin embargo f no puede ser el límite uniforme de la sucesión; si tomamos $\epsilon = 1/4$ no es posible que $|f(x) - x^n| < 1/4$ para todo $x \in [0, 1]$.

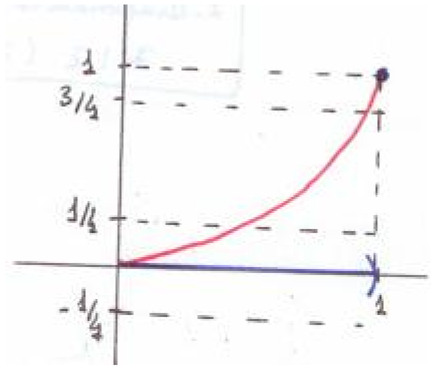


FIGURA 4

Lo que si ocurre siempre, y no es más que un sencillo ejerciccio para conprobar si se ha entendido las definiciones anteriores, es

Observación 1. *Si f es el límite uniforme de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces f también es el límite putual de tal sucesión (el recíproco no es cierto como vimos en el ejemplo anterior).*

Ejemplo 2. *Condideramos la sucesión $(\frac{x}{n})_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$. En primer lugar calculamos el límite puntual. $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$, para todo $x \in [0,1]$ (¡Hay que acordarse de calcular límites!). Por tanto $f \equiv 0$ es el límite puntual de la sucesión y candidato a límite uniforme. Ahora*

$$|f(x) - f_n(x)| = |0 - \frac{x}{n}| = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0,$$

luego para todo $\epsilon > 0$ tomando un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$, se tiene que para todo $n > n_0$ se verifica que

$$|0 - \frac{x}{n})| = \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon \qquad \textit{para todo} \qquad x \in [0,1].$$

Luego deducimos que también $f \equiv 0$ es el límite uniforme de la sucesión.

Un resultado que nos ayuda a entender la importancia de la convergencia uniforme es el siguiente.

Teorema 1. *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones*

$$f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

que converge uniformemente a la función f sobre el intervalo $[a,b]$.

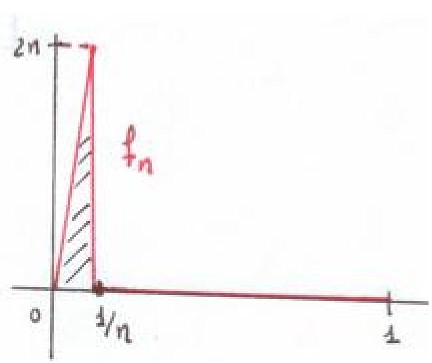
1. *Si cada función f_n es continua en $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$.*
2. *Si cada función f_n es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces f también es integrable en el intervalo $[a, b]$ y además se verifica la fórmula*
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Veamos algunos ejemplos que ponen en valor el enunciado del Teorema. Depués vemos la prueba.

Si no hay convergencia uniforme, lo enunciado en el teorema anterior no tiene por que ser cierto.

Ejemplo 3. *La sucesión $(x^n)_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, está formada por funciones $f_n(x) = x^n$ continuas en el intervalo $[0, 1]$. El límite puntual es la función $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$. Esta función no es continua en todo $[0, 1]$, ya que es discontinua en $x = 1$. Luego no puede ser el límite uniforme de la sucesión (algo que vimos antes; este es otro método de comprobarlo).*

Ejemplo 4. *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones sobre $[0, 1]$ dadas por el dibujo*



observemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$; y que además $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $f \equiv 0$ es el límite puntual de la sucesión, que no es uniforme en $[0, 1]$ ya que no es cierto que
$$\int_0^1 0dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

Ejemplo 5. *Para calcular* $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx$*, en primer lugar calculamos el límite puntual de la sucesión de funciones* $(\frac{ne^x}{n+x})_{n=1}^{\infty}$ *con* $x\in[0,1]$*,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ne^x}{n+x}=e^x \qquad \textit{para todo} \qquad x\in[0,1].$$

Ahora comprobamos que este límite es uniforme

$$|e^x-\frac{ne^x}{n+x}|=e^x|1-\frac{n}{n+x}|=e^x|\frac{x}{n+x}|\leq e\frac{1}{n}\to_{n\to\infty}0$$

(donde la desigualdad se tiene ya que $0\leq x\leq 1$*). Luego* $f(x)=e^x$ *es el límite uniforme de la sucesión de funciones* f_n*. Estas funciones son continuas en* $[0,1]$ *y por tanto integrables en* $[0,1]$*. Luego por el teorema anterior se sigue que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{ne^x}{n+x}dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\,\Big|_0^1=e-1.$$

Demostración: (del Teorema) **1)** Tomamos $x\in(a,b)$ (los casos $x=a$ y $x=b$ quedan como ejercicios). Veamos que f es continua en x.

Sea $\epsilon>0$. De la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_n$ existe N de modo que para todo $n\geq N$

$$|f(y)-f_n(y)|<\frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo} \qquad y\in[a,b].$$

Ahora como cada f_n es continua, para $n_0>N$ y el ϵ anterior existe $\delta>0$ de modo que

$$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|<\frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo} \qquad y\in(x-\delta,x+\delta).$$

Así sumando y restando $f_{n_0}(x)$ y $f_{n_0}(y)$

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|+|f_{n_0}(y)-f(y)|\leq\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$$

para todo $y\in(x-\delta,x+\delta)$. Lo que termina la prueba.

2) Usaremos el Criterio de Integrabilidad de Riemann para ver que f es integrable en $[a,b]$.

Sea $\epsilon > 0$. De la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_n$ existe N de modo que para todo $n \geq N$

$$|f(y) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \qquad \text{para todo} \qquad y \in [a,b].$$

Deducimos que f está acotada por estarlo cada f_n. Ahora por ser f_N integrable, para el ϵ anterior existe una partición P del intevalo $[a,b]$

$$P = \{t_0 = a < t_1 < .... < t_k = b\}$$

de modo que la diferencia entre suma superior e inferior es pequeña,

$$S(f_N, P) - I(f_N, P) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Además de la convegencia uniforme

$$m_{i,f_N} - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \leq m_{i,f} \leq M_{i,f} \leq M_{i,f_N} + \frac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

Veamos ahora que

$$S(f,P) \leq S(f_N, P) + \frac{\epsilon}{4} \qquad (*)$$

y que

$$I(f_N, P) - \frac{\epsilon}{4} \leq I(f,P). \qquad (**)$$

Si esto es así, entonces

$$S(f,P) - I(f,P) \leq S(f_N,P) + \frac{\epsilon}{4} - I(f,P) + \frac{\epsilon}{4} \leq \epsilon$$

y por el Criterio de Integrabilidad f es integrable en $[a,b]$.

Para ver $(*)$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{k} M_{i,f}(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{k} (M_{i,f_N} + \frac{\epsilon}{4(b-a)})(t_i - t_{i-1}) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_{i,f_N}(t_i - t_{i-1}) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) = S(f_N, P) + \frac{\epsilon}{4}.$$

La desigualdad $(**)$ se sigue de un modo análogo.

Por último, si $n \geq N$

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq$$

$$\int_a^b \frac{\epsilon}{4(b-a)} = \frac{\epsilon}{4}.$$

La definición de límite de una sucesión nos dice que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad \square$$

Ejercicio 1. *Dado que* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$*, justifica las siguientes cuentas.*

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} \qquad \square$$

Otro ejemplo completo del estudio de la convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones es el siguiente.

Ejemplo 6. *Sea la sucesión de funciones* $(\frac{\operatorname{sen} nx}{1+nx})_{n=1}^{\infty}$ *para* $x \geq 0$*. Se pide estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión. Vamos a calcular el límite puntual, veremos que no hay convergencia uniforme sobre* $[0,\infty)$*. Sin embargo si hay convergencia uniforme sobre* $[a,\infty)$ *si* a *es un número mayor que* 0*.*

1. *El límite puntual es*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{1+nx} = \begin{cases} 0 & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

   luego $f=0$ *es el límite puntual de la función.*

2. *Vamos a representar la gráfica de la función* $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{1+nx}$*, para un* n *fijo.* f_n *es continua en* $x \geq 0$*; además* $f_n(0) = 0$ *y* $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$*.* f_n *cambia de signo cuando lo hace la función* $\operatorname{sen} nx$*.*

   Derivando vemos que $f_n'(x) = \frac{n}{(1+nx)^2}(\cos nx - \operatorname{sen} nx + nx\cos nx)$*. Localizar los máximos y mínimos locales en este caso no parece sencillo.*

   Se puede observar, sin embargo, que para $x = \frac{\pi}{2n}$ *se tiene que* $f_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}$ *independientemente de* n*. Así nuestra función será como*

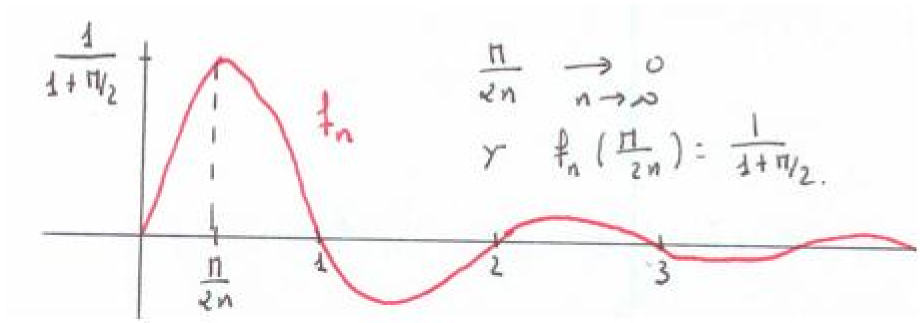


FIGURA 5. Gráfica de f_n

No es posible meter casi todas las funciones f_n (todas salvo un número finito de ellas) dentro de una banda suficientemente estrecha alrededor de la función $f = 0$. Por tanto no hay convergencia uniforme en $[0, 1]$.

3. *Por otro lado si $x \in [a, \infty)$ con $a > 0$, entonces*

$$|f(x) - f_n(x)| = |0 - \frac{\operatorname{sen} nx}{1 + nx}| = |\frac{\operatorname{sen} nx}{1 + nx}|$$
$$\leq \frac{1}{1 + an} \to_{n\to\infty} 0$$

ya que $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ para todo t y $x \geq a > 0$. Todo ello independientemente de x. Por tanto $f_n \to f = 0$ uniformemente sobre $[a, \infty)$, siendo a un número mayor que cero.

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`