AM PRÁCTICA-12

Nombre y apellidos..

1.-Se considera el polinomio $x^6+4x^5+3x^4+x^3+x^2+2x+2$ en $\mathbb{Z}_5[x]$. Determina si tiene raíces múltiples. Si las tiene, determina al menos una.

SEA $p(x) = x^6 + 4x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2.$

DERIVANDO

$p'(x) = 6x^5 + 20x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

CALCULAMOS $mcd(p, p')$. ALGORITMO DE EUCLIDES

$$\begin{array}{l|l}
x^6 + 4x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2 & x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \\
-x^6 \quad -2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 2x & x + 4 \\
\hline
4x^5 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2 & \\
-4x^5 \quad -3x^3 - 2x^2 - 3x - 3 & \\
\hline
x^4 + 2x^2 + 2x + 4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 & x^4 + 2x^2 + 2x + 4 \\
-x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 4x & x \\
\hline
x^2 + 3x + 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 2x^2 + 2x + 4 & x^2 + 3x + 2 \\
-x^4 - 3x^3 - 2x^2 & x^2 + 2x + 4 \\
\hline
2x^3 + 2x + 4 & \\
-2x^3 - x^2 - 4x & \\
\hline
4x^2 + 3x + 4 & \\
-4x^2 - 2x - 3 & \\
\hline
x + 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^2 + 3x + 2 & x + 1 \\
-x^2 - x & x + 2 \\
\hline
2x + 2 & \\
-2x - 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

LUEGO $mcd(p, p') = x + 1$

$x+1 \mid p$ Y $x+1 \mid p'$

COMO $x = 4$ ES UNA RAIZ DE $x+1$, $x = 4$ ES UNA RAIZ MULTIPLE DE P.

2.- Da un ejemplo de un polinomio irreducible mónico de grado 2 en $\mathbb{Z}_5[x]$.

Tomamos $f(x) = x^2 + x + b$ un polinomio mónico de grado 2 en $\mathbb{Z}_5[x]$.

Si $x=0$ no es raíz de f $\Rightarrow b \neq 0$

Si $x=1$ no " " $\Rightarrow 2+b \neq 0 \Rightarrow b \neq 3$

Si $x=2$ no " " $\Rightarrow 4+2+b \neq 0 \Rightarrow b \neq 4$

Si $x=3$ no " " $\Rightarrow 9+3+b \neq 0 \Rightarrow b \neq 3$

Si $x=4$ no " $\Rightarrow 16+4+b \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$

Luego, tanto x^2+x+1 o x^2+x+2 son irreducibles en $\mathbb{Z}_5[x]$

3.- Comprueba que $f(x) = x^2 + x + 2$ es un polinomio irreducible de $\mathbb{Z}_3[x]$. Calcula todas las raíces de este polinomio en el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3[x]/ < f >$.

(**Indicaciones:** 1ª Usa el Teorema de Kronecker. 2ª Divide por $x-\alpha$ en $\mathbb{F}[x]$ donde α es la clase de la $[x]$).

$f(x) = x^2+x+2$ tiene grado 2. Si fuese reducible tendría alguna raíz.

$f(0) = 2 \neq 0$, $f(1) = 1+1+2 \neq 0$, $f(2) = 4+2+2 = 2 \neq 0$

Como no tiene raíces es irreducible.

Así $\mathbb{Z}_3[x]/<f> = \mathbb{F}$ es un cuerpo y $\alpha = [x]$ es una raíz de f en el cuerpo $\mathbb{F}$ (teorema de Kronecker).

Si dividimos f entre $x-\alpha$ $\Rightarrow f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$

y así α y β son las raíces de f en $\mathbb{F}$

$$\begin{array}{l|l} x^2 + x + 2 & x-\alpha \\ \hline -x^2 + \alpha x & x + (1+\alpha) \\ \hline (1+\alpha)x + 2 & \\ -(1+\alpha)x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$-\alpha = 2\alpha$

$(1+\alpha) = 1+\alpha$

$$\begin{array}{r} 1+\alpha \\ \times \quad 2\alpha \\ \hline 2\alpha + 2\alpha^2 \end{array} = 2(\alpha+\alpha^2) = 2$$

$\downarrow$

$\alpha^2+\alpha+2 = 0$

$\alpha^2+\alpha = -2 = 1$

Luego $f(x) = x^2+x+2 =$

$= (x-\alpha)(x-(2+2\alpha))$.

Así $x = \alpha$ y $x = 2+2\alpha$ son las raíces de f en $\mathbb{F}$

$\times$ $\mathbb{F}$	1	2	α	2α	$\alpha+1$	$\alpha+2$	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
1								
2								
α								
2α								
$\alpha+1$			1	2				
$\alpha+2$								
$2\alpha+1$								
$2\alpha+2$				1				