AM PRÁCTICA-13

Nombre y apellidos.....

1.- Se considera la tabla de multiplicar del cuerpo de 9 elementos $\mathbb{F}_9$:

$(\mathbb{F}_9^*, \times)$	1	2	α	2α	$1+\alpha$	$1+2\alpha$	$2+\alpha$	$2+2\alpha$
1	1	2	α	2α	$1+\alpha$	$1+2\alpha$	$2+\alpha$	$2+2\alpha$
2	2	1	2α	α	$2+2\alpha$	$2+\alpha$	$1+2\alpha$	$1+\alpha$
α	α	2α	2	1	$2+\alpha$	$1+\alpha$	$2+2\alpha$	$1+2\alpha$
2α	2α	α	1	2	$1+2\alpha$	$2+2\alpha$	$1+\alpha$	$2+\alpha$
$1+\alpha$	$1+\alpha$	$2+2\alpha$	$2+\alpha$	$1+2\alpha$	2α	2	1	α
$1+2\alpha$	$1+2\alpha$	$2+\alpha$	$1+\alpha$	$2+2\alpha$	2	α	2α	1
$2+\alpha$	$2+\alpha$	$1+2\alpha$	$2+2\alpha$	$1+\alpha$	1	2α	α	2
$2+2\alpha$	$2+2\alpha$	$1+\alpha$	$1+2\alpha$	$2+\alpha$	α	1	2	2α

Se considera el polinomio $x^2 + (1+2\alpha) \in \mathbb{F}_9[x]$.

a) Comprueba que $x^2 + (1+2\alpha)$ es irreducible en $\mathbb{F}_9[x]$.

b) Encuentra el inverso de la clase $[x]$ en el cuerpo $\mathbb{F}_9[x]/x^2 + (1+2\alpha)$.

a) $x^2 + (1+2\alpha)$ es un polinomio de grado 2.

$-(1+2\alpha) = -1 - 2\alpha = 2 + \alpha$

Tabla de sumar: $1 + 2 = 0$

observamos que $\mathbb{F}_9$ es como $\mathbb{Z}_3[x]/x^2+1$.

En la diagonal de la tabla, no está $2+\alpha$, luego $x^2 + (1+2\alpha)$ no tiene raíces en $\mathbb{F}_9$ y por tanto es irreducible.

b) Como $[x]^2 + (1+2\alpha) = 0$

tenemos $[x]^2 = -1 - 2\alpha = 2 + \alpha$

El inverso de $2+\alpha$ en $\mathbb{F}_9$ es $1+\alpha$ (mirando la tabla)

Luego $(1+\alpha)[x]^2 = (1+\alpha)[x][x] = (1+2)(2+\alpha) = 1$

Así el inverso de $[x]$ es $(1+\alpha)[x]$.

2.- Encuentra todas las soluciones de la ecuación

$$(6x+4)(x^2+x+3)=0$$

en el cuerpo

$$\mathbb{K}=\mathbb{Z}_7[x]/ < x^2+x+3 > .$$

$6x+4=0$ ó $x^2+x+3=0$

$(6x+4)(x^2+x+3)=0 \iff$ K es cuerpo, no hay divisores de cero

Si $x=(-4)\,6^{-1} = 3\times 6 = 18 \equiv 4 \mod 7$ $\qquad$ $x=4$ raíz

$-4 \equiv 3 \mod 7$

$6\times 6 \equiv 1 \mod 7$

$f(x) = x^2+x+3$ es irreducible en $\mathbb{Z}_7$ ya que

$x=0$	$f(0) = 3 \neq 0$
$x=1$	$f(1) = 1+1+3 = 5 \neq 0$
$x=2$	$f(2) = 4+2+3 = 2 \neq 0$
$x=3$	$f(3) = 9+3+3 = 1 \neq 0$
$x=4$	$f(4) = 16+4+3 = 2 \neq 0$
$x=5$	$f(5) = 25+5+3 = 5 \neq 0$
$x=6$	$f(6) = 36+6+3 = 3 \neq 0$

Luego $x=[x]=\alpha \in \mathbb{K}$ es raíz de x^2+x+3

Para encontrar la segunda raíz de $f(x) = x^2+x+3$ dividimos por $x-\alpha = x+6\alpha$

$$\begin{array}{l|l} x^2+x+3 & x+6\alpha \\ \hline -x^2+\alpha x & x+(1+\alpha) \\ (1+\alpha)x+3 & \\ -(1+\alpha)x-(6\alpha+6\alpha^2) & \\ \hline \alpha^2+\alpha+3=0 & \end{array}$$

Luego $x = -(1+\alpha) = 6+6\alpha$ es la segunda raíz de f

Como el polinomio $(6x+4)(x^2+x+3)$ es de tercer grado, sólo puede tener 3 raíces, sus raíces son 4, $\alpha=[x]$ y $6+6[x]$.