Análisis de Variable Real – Facultad de CC. Matemáticas 11 de enero de 2023
Univ. Complutense de Madrid
Curso 2022/2023

EXAMEN FINAL

Apellidos: ....

Nombre: ....

Ejercicio 1. (2 puntos). Sea el siguiente subconjunto de números reales:

$$A = \left\{ x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : \frac{1}{x} > \frac{1}{x-2} \right\} \cup \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a). (1.5 ptos.). Determine razonadamente el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo del conjunto A (en caso de que existan).

(b). (0.5 ptos.). Determine los puntos de frontera y los puntos de acumulación del conjunto A.

Ejercicio 2. (1.5 puntos). Sea la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2 + x_n}, & \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

(a). (1 pto.). ¿Es $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente? En caso afirmativo calcula el límite de la misma.

(b). (0.5 ptos.). Sea la sucesión de recurrencia $(\omega_m)_{m=1}^{\infty}$ dada por

$$\begin{cases} \omega_1 = -2, \\ \omega_{m+1} = \dfrac{1 - 2\omega_m}{\omega_m}, & \text{para } m \geq 1, \end{cases}$$

y considérese el conjunto $W = \{\omega_m : m \geq 1\}$. Demuestre que si $x_1 \in W$, entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no está definida.

Ejercicio 3. (2 puntos) Considérese una sucesión cualquiera de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Consideremos las siguientes definiciones:

- Se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es *sumable* si existe el siguiente límite:

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n.$$

En otras palabras, si la serie asociada a dicha sucesión es convergente.

- Se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es *sumable Cesàro* si el siguiente límite existe:

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{k} x_n.$$

Se pide:

(a). (1 pto.) Compruebe que la sucesión $x_n = (-1)^n$ para $n \geq 1$ es sumable Cesàro pero no es sumable.

(b). (1 pto.) Demuestre razonadamente que si una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es sumable, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es sumable Cesàro.

Ejercicio 4. (1.5 puntos) Razone si pueden existir ejemplos de sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$ tales que satisfagan las siguientes propiedades. Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo razonado; en caso contrario, proporcione las explicaciones pertinentes.

(a). (0.3 ptos.). $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(b). (0.3 ptos.). $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sea de Cauchy pero no sea contractiva.

(c). (0.3 ptos.). $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tenga solamente una subsucesión convergente, y el resto divergentes.

(d). (0.3 ptos.). $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sea contractiva y monótona creciente.

(e). (0.3 ptos.). $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sea una serie tal que tenga una reordenada convergente al número π.

Ejercicio 5. (1.5 puntos) Escoge 3 de los siguientes apartados e indica razonadamente la convergencia o divergencia de las siguientes series. Si es posible calcula también el valor que suman:

(a). $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n\log(n)}$.

(b). $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$.

(c). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\pi^n}$.

(d). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^{1/3}+2}$.

Ejercicio 6. (1.5 puntos) Responda a las siguientes preguntas sobre límites de funciones:

(a). (0.75 ptos.) Calcule el siguiente límite en caso de que exista:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(x+1)^2-1}{x}\right) \operatorname{sen}(1/x^2).$$

(b). (0.75 ptos.) Demostrar por la definición de límite que 1 no es el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}\right).$$