CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

PROBLEMA 1:

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x-1} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x & \text{si } 0<x<1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$

$g(x) = \dfrac{-1}{x-1}$ está definida en $\mathbb{R}-\{1\}$.
Allí es continua por ser cociente de funciones (polinómicas) continuas y $x-1 \neq 0$ $(x \neq 1)$. Además

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{-1}{x-1} = 1$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$

f es continua en $(-\infty, 0)$, pero no lo es en $x=0$

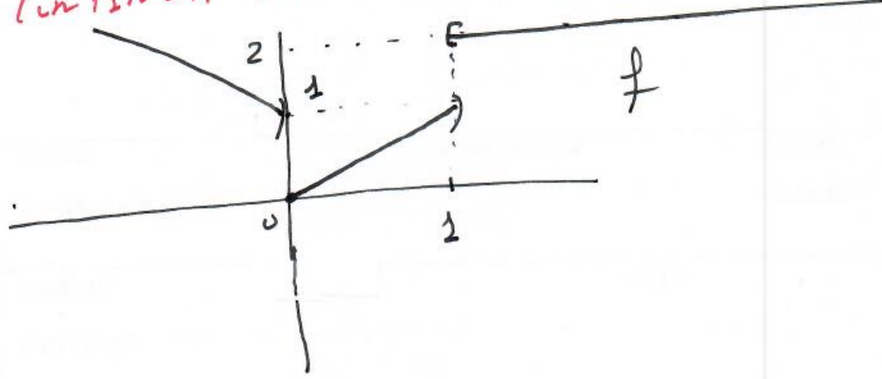
Claramente f es continua en $(0,1)$ $(f(x)=x)$

y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$,

pero $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 2 = 2$, son distintos. Luego f no es continua en $x=1$.

Es claro que f es continua en $x>1$

Así f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$



CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 2:

$f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$ Como $h_1(x)=x$ y $h_2(x)=|x|$ son continuas y $2\neq 0$, entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$

$g(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

Luego g es continua en todo $\mathbb{R}$ ($h_1(x)=x$ y $h_3(x)=x^2$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$)

$g\circ f$ y $f\circ g$ son continuas ya que la composición de funciones continuas lo es.

PROBLEMA 3:

$f(x) = \begin{cases} 2\cos x & \text{si } x\leq c \\ (ax+b)^2 & \text{si } x>c \end{cases}$

No importa quien es c, f es continua en $(-\infty, c)$ y en (c,∞) ya que $2\cos x$ y $(ax+b)^2$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.

¿Qué pasa en c?

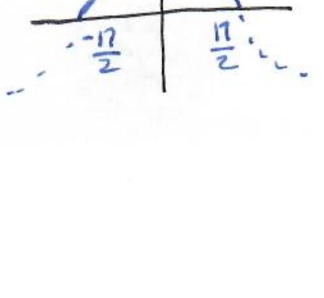
$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c} 2\cos x = 2\cos c$

$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c} (ax+b)^2 = (ac+b)^2$ tiene que

para que f sea continua en $x=c$

ocurrir que $2\cos c = (ac+b)^2$

necesariamente $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (ó $c\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$)

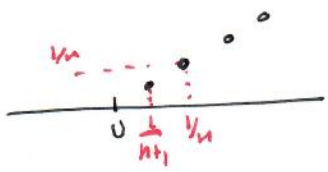


Si fijamos $c\in(-\pi/2, \pi/2)$.

$\sqrt{2\cos c} = ac+b$ $\begin{cases} b=\sqrt{2} & \text{si } c=0 \text{ (a cualquiera)} \\ a = \dfrac{\sqrt{2\cos c}-b}{c} & c\neq 0 \text{ (b cualquiera)} \end{cases}$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 4: a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \\ x & \text{si } x = \frac{1}{n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n \geq n_0$ se tiene que $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$,

así $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

f continua en $x = 0$.

b) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1/n \text{ y } x \neq 0 \\ x & \text{si } x = 1/n \quad n \in \mathbb{N} \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

g no es continua en $x = 0$ ya que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \neq g(0)$

PROBLEMA 5: $f(x) = \dfrac{1}{\lambda x^2 - 2\lambda + 1}$ en $[0,1]$, el

para que f sea continua en $[0,1]$ no debe anularse el

denominador $\lambda x^2 - 2\lambda + 1$ en $[0,1]$

$\lambda x^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff x = \dfrac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda} =$

$= 1 \pm \dfrac{\cancel{2}\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\cancel{2}\lambda}$

- Si $\lambda < 1 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) < 0$ no hay raíces reales y f es continua
- Si $\lambda = 1 \Rightarrow x = 1$ es una raíz y f no es continua en $x = 1$
- Si $\lambda > 1$ $\quad 0 < \dfrac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\lambda} < 1 \iff 0 < \sqrt{\lambda(\lambda-1)} < \lambda \iff 0 < \lambda^2 - \lambda < \lambda^2$

En este caso $x = 1 - \dfrac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\lambda} \in (0,1)$ es raíz y f no es continua

La solución $\underline{\underline{\lambda < 1}}$

PROBLEMA 6: ver teoría

CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 7 y 8:

SEAN f, g $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUAS, VEAMOS QUE $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ES CONTINUA

DEM SEA $x_0 \in \mathbb{R}$ PARA $\varepsilon > 0$

$\exists\, \delta_1 > 0$ TAL QUE SI $0 \le |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\exists\, \delta_2 > 0$ TAL QUE SI $0 \le |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

SUPONGAMOS QUE

- $f(x_0) > g(x_0)$, POR CONTINUIDAD EXISTE δ_{x_0} TAL QUE $f(x) > g(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$. LUEGO $h|_{(x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})} = f$, ASÍ h ES CONTINUA EN x_0 POR SERLO f.
- SI $g(x_0) > f(x_0)$, IGUALMENTE ..... $h|_{(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta)} = g$ .. etc.
- SI $f(x_0) = g(x_0)$, IGUALMENTE $\forall \varepsilon > 0$, TOMAMOS $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (LOS DE ARRIBA) SE TIENE QUE $\forall x$ TAL QUE $0 \le |x - x_0| < \delta$

Y ASÍ $|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - h(x_0)| < \varepsilon$
$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - h(x_0)| < \varepsilon$
y $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$; DE LO QUE SE SIGUE QUE

LUEGO $h = \max\{f, g\}$ ES CONTINUA.

PROBLEMA 9: SEA $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{SI } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

PARA $x_0 \in \mathbb{R}$, Y $\delta > 0$ CUALQUIERA $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ Y $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, LUEGO g NO ES CONTINUA.

AHORA $|g(x)| \equiv 1$, UNA FUNCIÓN CONSTANTE ES EL EJEMPLO MÁS SENCILLO DE FUNCIÓN CONTINUA.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 10: $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ NO EXISTE, CLARO

PARA $x_k = \dfrac{1}{2k\pi + \pi/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\dfrac{1}{x_k} = 1$

Y

PARA $y_k = \dfrac{1}{2k\pi + \pi} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\dfrac{1}{y_k} = 0$

LUEGO INDEPENDIENTEMENTE DEL VALOR DE $f(0)$ f NO ES CONTINUA EN CERO Y TIENE UNA DISCONTINUIDAD ESENCIAL EN $x=0$

— o —

PARA $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & \text{SI } x = 0 \end{cases}$ COMO

$\left| x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, EXISTE

$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0 \ne f(0) = 1$ LUEGO f TIENE UNA DISCONTINUIDAD EVITABLE EN $x=0$

PROBLEMA 11: SI VEMOS QUE EXISTE $\lim_{x\to a} f(x)$ $\forall a \in [0,1]$

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = g(a)$, ¡CLARO Y SERÁN ENTONCES TAMBIÉN CONTINUA!

f NO ES CONTINUA EN $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $x = \frac{p}{q}$ IRREDUCIBLE YA QUE COMO VAMOS A VER $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ PARA TODO $a \in [0,1]$

SEA $a \in [0,1]$ Y SEA $\varepsilon > 0$, SEA $q_0 \in \mathbb{N}$ TAL QUE $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$, SE CONSIDERA $\left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ q > q_0 \right\} = \{ r_1 r_2 \dots r_{q_0} \}$ ES UN CONJUNTO FINITO YA QUE $p<q$, LUEGO A LO MÁS TIENE $q_0 \times q_0$ ELEMENTOS

SEA $\delta = \min \left\{ \left| \frac{p}{q} - a \right| : q > q_0, 0 \le p \le q, \frac{p}{q} \ne a \right\} > 0$, ASÍ EXCEPTUANDO

SI $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{q_0} < \varepsilon$; LUEGO $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMAS 12:) Sea $\varepsilon>0$, por ser g continua en cero, existe $\delta>0$ tal que $\forall\ 0\leq|x|<\delta$

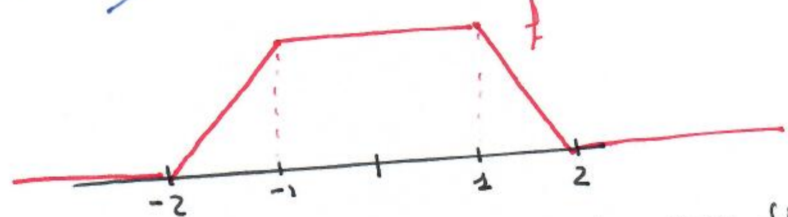
$$\Rightarrow |f(x)| \leq |g(x)| < \varepsilon,$$

Luego $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. Como $|f(0)|\leq|g(0)|=0$

$\Rightarrow f(0)=0$. Ambas cosas prueban que f es continua en $x=0$.

Si $g(x)$ es continua y $|f(x)|\leq|g(x)|$, f puede ser discontinua en todo $\mathbb{R}$, (ver ejercicio 4)

PROBLEMA 13:)



f es continua y verifica lo que se pide. Con ecuaciones.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-2 \\ x+2 & \text{si } x\in[-2,-1] \\ 1 & \text{si } x\in[-1,1] \\ -x+2 & \text{si } x\in[1,2] \\ 0 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

$h(x)=x+2$ $\quad h(-2)=0$ y $h(-1)=1$

$g(x)=-x+2$ $\quad h(1)=1$ y $h(2)=0$

PROBLEMA 14:) •) $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$

••) $f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)=0 \Rightarrow f(-x)=-f(x)$.

•••) Así $|f(x)-f(a)|=|f(x)+f(-a)|=|f(x-a)|$.

Por ser f continua en cero $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ $0\leq|x-a|<\varepsilon$, $|f(x-a)-f(0)|=|f(x-a)|<\varepsilon$.

En conclusión f es continua en a.

Lo que prueba que

iv) Si $n\in\mathbb{N}$ $f(n)=nf(1)$. v) $f(\frac{n}{n})=nf(\frac{1}{n})=f(1)\Rightarrow f(\frac{1}{n})=\frac{f(1)}{n}$.

Luego $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{q}f(1)$. Así $f(x)=xk$ $(k=f(1))$ $\forall x\in\mathbb{Q}$, por ser f y xk continuas $\Rightarrow f(x)=xf(1)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 15: •) $f(0) = f(0+0) = f(0)\,f(0)$ $(f(x) = f(x+0) = f(0)\,f(x))$

o bien $f(0) = 0$ y así $f \equiv 0$

o bien $f(0) = 1$. Sigamos con este caso

••) $f(n) = f(1)^n$ y •••) $f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{f(1)}$

Como $f(0) = f(1+(-1)) = f(1)\,f(-1) \Rightarrow f(-1) = f(1)^{-1}$.

Luego $\forall \frac{r}{q} \in \mathbb{Q}$. se sigue que $f\left(\frac{r}{q}\right) = f(1)^{r/q}$

Así $f(x) = f(1)^x$ si $x \in \mathbb{Q}$..

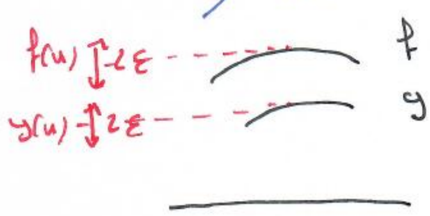
Como $f(x)$ es continua y $g(x) := f(1)^x$ $(f(1)>0)$ es continua y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ (es decir $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$) se sigue que $f(x) = f(1)^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

¡Claro! si $x \in \mathbb{R}$, $\exists\, x_k \in \mathbb{Q}$ con $x_k \to x$

Así $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f(1)^{x_k} = f(1)^x \\ f(x) \end{cases}$!

PROBLEMA 16:

a) Sea $a \in \mathbb{R}$, así $f(a) > g(a)$. Sea $\varepsilon = \frac{f(a)-g(a)}{2}$

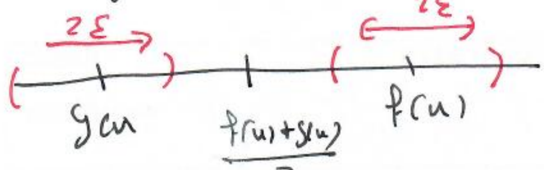


$\exists\, \delta_1 > 0$ tal que si $0 \le |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

$\exists\, \delta_2 > 0$ tal que si $0 \le |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \varepsilon$

Luego si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ y $|g(x)-g(a)| < \varepsilon$ $\forall\, 0 \le |x-a| < \delta \Rightarrow$

Luego $g(x) < f(x)$ $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$



Así $(a-\delta, a+\delta) \subseteq A$; lo que prueba que A es abierto

b) $B = \mathbb{R} \setminus (\{x : f(x) > g(x)\} \cup \{x : g(x) > f(x)\})$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES
DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 16.] c) $C = \{ x \in \mathbb{R} : \exists y \in [0,1] : f(y) = x \} =$

$= \operatorname{Im} f_{|[0,1]}$.

LO QUE VAMOS A PROBAR ES QUE LA IMAGEN DE UN CONJUNTO COMPACTO ($[0,1]$) POR UNA FUNCIÓN CONTINUA ES DE NUEVO UN COMPACTO.

SEA $(x_k) \subseteq C$, EXISTE $(y_k) \subseteq [0,1]$ CON $f(y_k) = x_k$

(*) CON $(y_k) \subset [0,1]$ ($[0,1]$ COMPACTO), POR EL TEOREMA DE BOLZANO WEIERSTRASS EXISTE SUBSUCESIÓN

$$y_{k_n} \to y \in [0,1]$$

$$f(y_{k_n}) = x_{n_k} \to f(y) \in C.$$

Y DE LA CONTINUIDAD

POR LA CARACTERIZACIÓN DE COMPACTOS POR SUCESIONES C ES COMPACTO.

O TAMBIÉN: $f\ [0,1] \to \mathbb{R}$ f CONTINUA

$f_{|[0,1]} = C$ ESTÁ ACOTADO.

SI $(x_k) \subseteq C$, Y $x_k \to x$, ENTONCES POR (*)

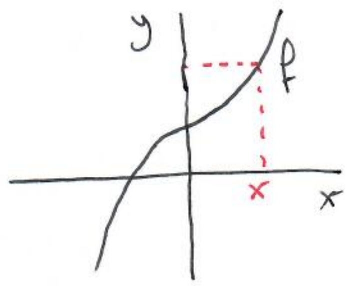
$\exists\ y_{k_n}$ CON $f(y_{k_n}) = x_{k_n}$ Y $y_{k_n} \to y \in [0,1]$

POR CONTINUIDAD $f(y_{k_n}) = x_{n_k} \to f(y) = x$

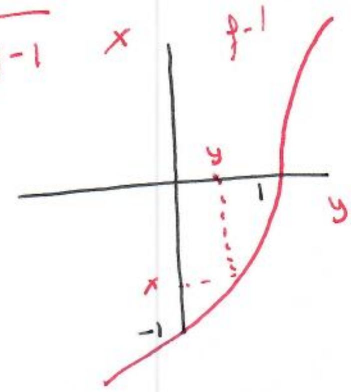
ASÍ $x \in C$ Y C ES CERRADO

CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 17: a) $f(x) = x^3+1 \quad x \in \mathbb{R}$



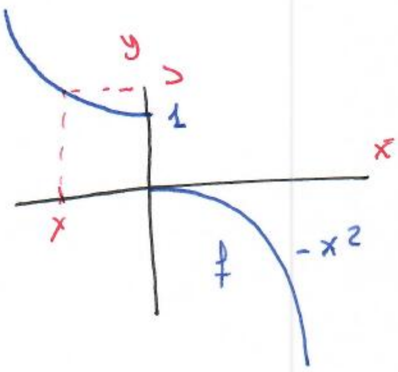
$y = x^3+1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$



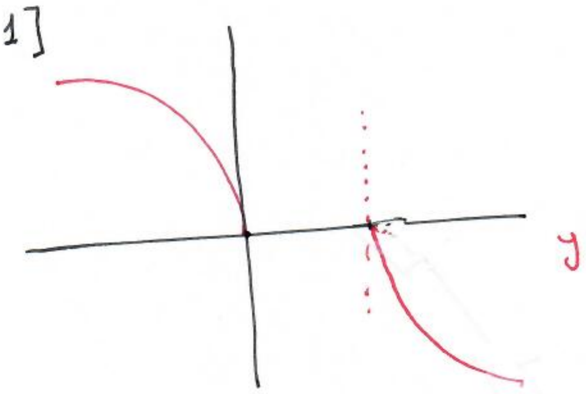
¡Misma gráfica dada la vuelta!

f es continua e inyectiva, también lo es f^{-1}.

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 1-x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



$\mathrm{Dom}\, f^{-1} = \mathbb{R} - (0,1]$



f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego f^{-1} es continua en $\mathbb{R} \setminus (0,1)$.

PROBLEMA 18: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo $\Leftrightarrow$ si $\forall x, y \in I \Rightarrow (x,y) \in I$.

La prueba, en este caso es una sencilla aplicación del teorema de Bolzano.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 19º] ¿ $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

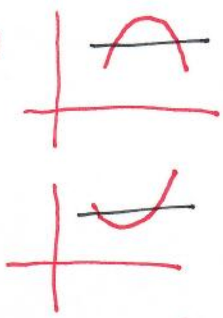
f inyectiva y continua $\Rightarrow$ monótona. (•)

como $f(a) \leq f(b) \Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

Luego $f([a,b]) \subseteq [f(a), f(b)]$

Por otro lado, por el teorema de Bolzano $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$

(•)

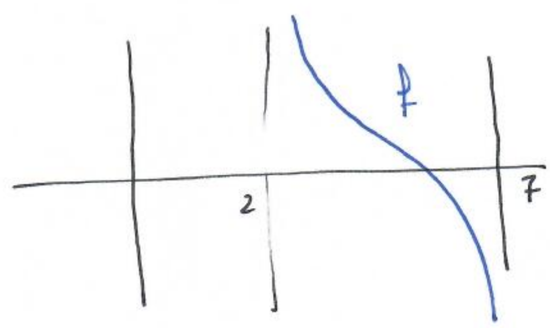


Si no es monótona
f no es inyectiva

— . —

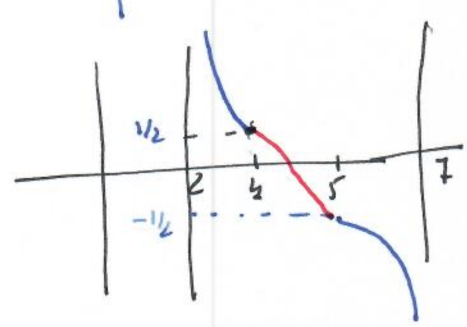
Si $f(b) \leq f(a)$, entonces $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

PROBLEMA 20º]



ESBOZO GRÁFICO

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \in (2,4) \\ \dfrac{9}{2} - x & \text{si } x \in [4,5] \\ \dfrac{1}{x-7} & \text{si } x \in (5,7) \end{cases}$$



$\dfrac{1}{x-2} > 0 \quad x > 2$, $\quad \dfrac{1}{x-2} \xrightarrow{x \to 2^+} \infty$

$\dfrac{1}{x-7} < 0$ si $x < 7$, $\quad \dfrac{1}{x-7} \xrightarrow{x \to 7^-} -\infty$

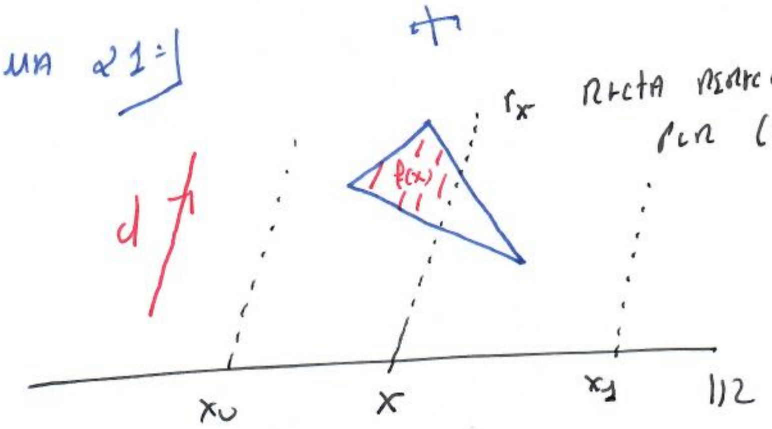
$y = \frac{9}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

f es claramente continua $\quad \dfrac{1}{4-2} = \dfrac{9}{2} - 4$

y $\quad \dfrac{1}{5-7} = \dfrac{9}{2} - 5$.

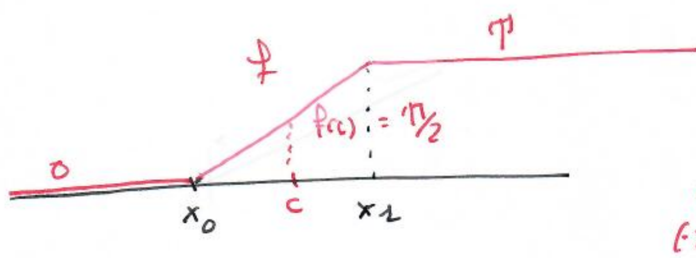
CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 21:



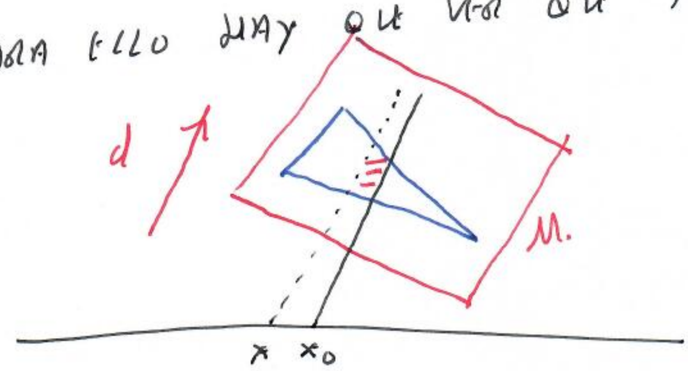
r_x recta paralela a d que pasa por $(x,0)$.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$
$$x \longrightarrow f(x) = \text{área de } T \text{ a la izquierda de } r_x$$



Gráfica de f; por el teorema de Bolzano basta probar que existe c tal que $f(c) = T/2$

Para ello hay que ver que f es continua.



Metemos T en un cuadrado de lado M, con lados paralelos u ortogonales a d.

Así $|f(x_0) - f(x)| \le |x - x_0| M \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Luego f es continua.

PROBLEMA 22: $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + \overline{c_{n-1} x^{n-1}}$ con

$f(x_i) = c_0 + c_1 x_i + \dots + c_{n-1} x_i^{n-1} = a_i \quad i = 1 \dots n.$

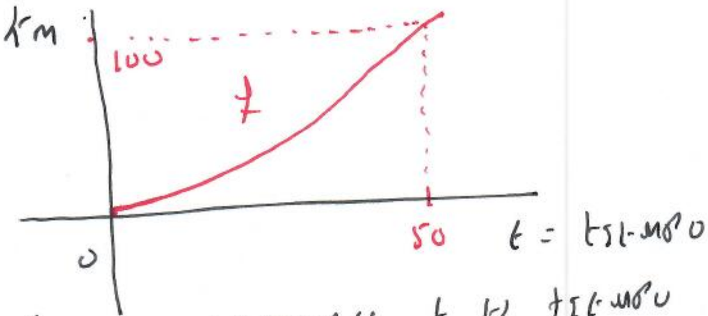
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + x_1^{n-1} = a_1 \\ \vdots \\ f(x_n) = c_0 + c_1 x_n + \dots + x_n^{n-1} = a_n \end{cases} \Leftrightarrow \text{matricialmente} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ & & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Sistema lineal $n \times n$ con $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^{n-1} \\ & & \\ 1 & x_n & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$ (si $x_i \neq x_j \; \forall i \neq j$).

Este sistema tiene solución única (ver apuntes álgebra lineal)

CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 23:



SUPONGAMOS QUE f CON VARIABLE t EL TIEMPO (EN MINUTOS) NOS DA EL KILÓMETRO DONDE ESTÁ EL COCHE. COMO ESTE NO SE DETUVO, SUPONEMOS

f CONTINUA

EL COCHE NO SE DETUVO

SE DEFINE $y: [0,49] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow y(x) = f(x+1) - f(x) > 0$$

COMO f ES CONTINUA, y TAMBIÉN ES UNA FUNCIÓN CONTINUA.

SI SUPONEMOS QUE $\boxed{y(x) < 2}$ (*) PARA TODO $x \in [0,49]$,

EN DONDE

$$\sum_{t=0}^{49} y(t) = f(1) - f(0) + \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)} + \dots + \cancel{f(49)} - f(48) + f(50) - \cancel{f(49)}$$

$$= f(50) - f(0)$$

(**) SI POR UN LADO $\displaystyle\sum_{t=0}^{49} y(t) \underset{(*)}{<} 2 \times 50 = 100$

Y POR OTRO $\displaystyle\sum_{t=0}^{49} y(t) = f(50) - f(0) = 100$

LUEGO EXISTE ALGÚN $x_0 \in [0,49]$ TAL QUE $f(x_0) \geq 2$

POR LAS MISMAS CUENTAS QUE (**), NO PUEDE OCURRIR QUE $y(x) > 2$ PARA TODO $x \in [0,49]$.

LUEGO SI EXISTE $x_0 \in [0,49]$ CON $y(x_0) = 2$ HEMOS TERMINADO

SI NO EXISTEN $x_1, x_2 \in [0,49]$ CON $y(x_1) < 2$ Y $y(x_2) > 2$. AHORA USANDO BOLZANO, EXISTE UN $x_0 \in [0,49]$, $x_0 \in (x_1, x_2)$ Ó $x_0 \in (x_2, x_1)$ TAL QUE $y(x_0) = f(x_0+1) - f(x_0) = 2$ //.