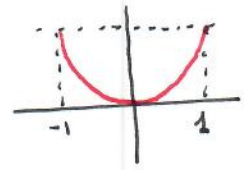
FUNCIONES CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE CONTINUAS.

PROBLEMA 1: a) $f(x) = x^2 \quad x \in (-1,1)$



$x^2 \geq 0$; si $x<0$ $f(x)$ decrece; si $x>0$ $f(x)$ crece; **f par**

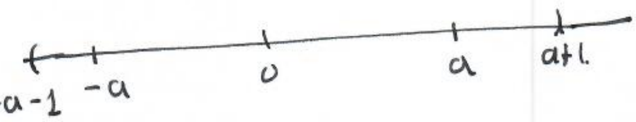
$0 \leq x^2 < 1$ acotada; $x=0$ es un mínimo

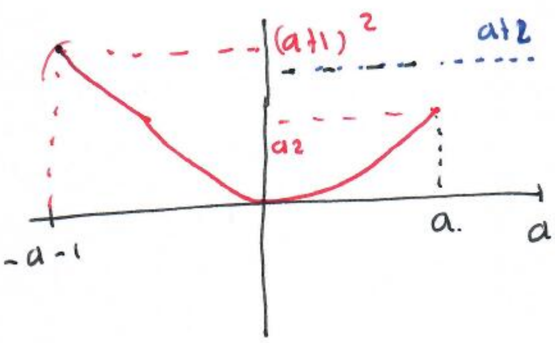
f no tiene máximo, si $x \in (-1,1)$ sea $0<x<y<1$

así $x^2 < y^2$.

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad x \in (-a-1, a+1)$

Suponemos $a > 0$





si $0 < a \leq 1$ $\quad a^2 \leq a+1$

si $a > 1$ $\quad a^2 = a+2$

$\iff a^2 - a - 2 = 0$

$a = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$

si $a < 2$, $\quad a^2 < a+2$ (f discontinua)

si $a = 2$; $\quad a^2 = a+2$ y así **f es continua**

si $a > 2$ $\quad a^2 > a+2$ (f discontinua)

en todo caso

$0 \leq f(x) \leq \max\{(a+1)^2, a+2\}$.

$x=0$ mínimo

si $(a+1)^2 \leq a+2$ $\Rightarrow$ $x \in (a, a+1)$ máximo

si $(a+1)^2 > a+2$ $\quad f$ no tiene máximo, ya que $\text{Dom} f = (-1-a, a+1)$ es abierto.

F. CONTINUAS Y UNIF. CONTINUAS

PROBLEMA 2: Si $f(r) = g(r)$ $\forall r \in \mathbb{Q}$ y son continuas $\Rightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (esto es algo que ya hemos usado antes en los problemas de la hoja anterior).

Sea $x \in \mathbb{R}$, $\exists (x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ con $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$,

así $f(x_n) = g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = g(x)$ ya que tanto f como g son continuas.

PROBLEMA 3: Sea $g(x) = f(x) - g(x)$ $x \in [a,b]$

g es continua ya que es suma de funciones continuas (f, y $-g$). Además

$g(a) = f(a) - g(a) < 0$ y $g(b) = f(b) - g(b) > 0$

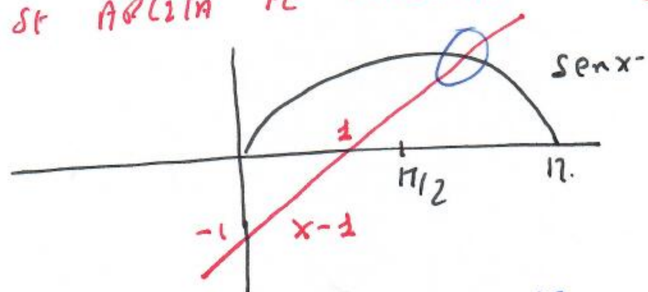
así por el teorema de Bolzano, existe $x_0 \in (a,b)$ con $0 = g(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

PROBLEMA 4: Usa problema 3 convenientemente

PROBLEMA 5: $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad g(x) = x - 1$

$0 = f(0) > g(0) = -1$ $\quad 0 = f(\pi) < g(\pi) = \pi - 1$

Ahora se aplica el problema 3



Prueba gráfica

PROBLEMA 6: Sea $g: [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \to g(x) = f(x+1) - f(x)$

g es continua, por ser composición y suma de funciones que lo son.

Ahora $g(0) = f(1) - f(0)$

$g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1)$

Si $f(0) = f(1)$ hemos terminado, si no

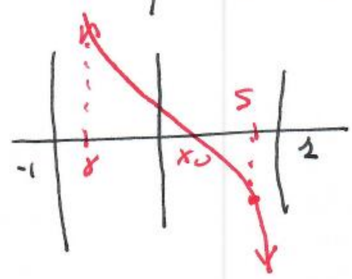
$g(0) \cdot g(1) < 0$, $\underset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow}$ $\exists x \in (0,1)$ con $0 = f(x+1) - f(x) \Rightarrow f(x) = f(x+1)$.

F. CONTINUAS Y UNIF. CONTINUAS

PROBLEMA 7: a) SEA $f(x) = x^{15} + \dfrac{x^{14} - 17x + 13}{(x^2-1)^2} =$

$$= \frac{x^{15}(x^2-1)^2 + x^{14} - 17x + 13}{(x^2-1)^2}$$

COMO $h(x) = x^{14} - 17x + 13$ VERIFICA QUE $\begin{cases} h(1) = -3 \\ h(-1) = +3 \end{cases}$



ASÍ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty$

y $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

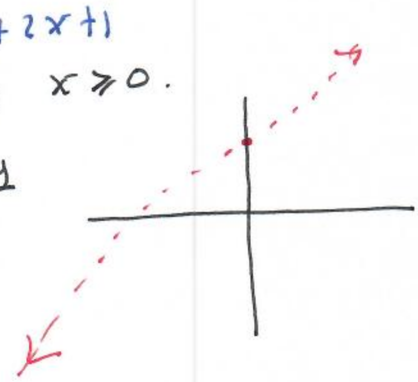
SEA $r \sim 1^-$ CON $f(r) > 0$

SEA $s \sim 1$ CON $f(s) < 0$, POR BOLZANO

EXISTE $x_0 \in (r, s)$ CON $f(x_0) = 0$ ¡SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN!

PROBLEMA 8: b) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

OBSERVEMOS QUE $f(x) > 0$ SI $x \geq 0$.



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $f(0) = 1$

$f(-2) = -32 + 40 - 4 + 1 > 0$

$f(-3) = -3^5 + 5 \times 81 - 6 + 1 =$

$= -3 \times 81 + 5 \times 81 - 6 + 1 > 0$

$f(-4) > 0$, PERO

$f(-5) = -5^5 + 5^5 - 10 + 1 < 0$.

PROBLEMA 9: SEA $f(r) = \min\{f(t_1)\ f(t_2) \dots f(t_n)\}$

SEA $f(s) = \max\{f(t_1)\ f(t_2) \dots f(t_n)\}$.

ASÍ $f(r) \leq \dfrac{n f(r)}{n} \leq \dfrac{f(t_1) + \dots + f(t_n)}{n} \leq$

$\leq \dfrac{n f(s)}{n} = f(s)$.

POR BOLZANO EXISTE $c \in (r, s)$ O BIEN $c \in (s, r)$ TAL

QUE $f(r) \leq c = \dfrac{f(t_1) + \dots + f(t_n)}{n} \leq f(s)$.

F. CONTINUAS Y UNIF. CONTINUAS

PROBLEMA 10:] a) $f(x) = x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \cdots + a_0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{x^{2k}}_{\downarrow\,\infty}\Big(\underbrace{1}_{\downarrow\,1} + \underbrace{\frac{a_{2k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2k-1}}}_{\downarrow\, x\to\pm\infty\ \ 0}\Big) = \infty$$

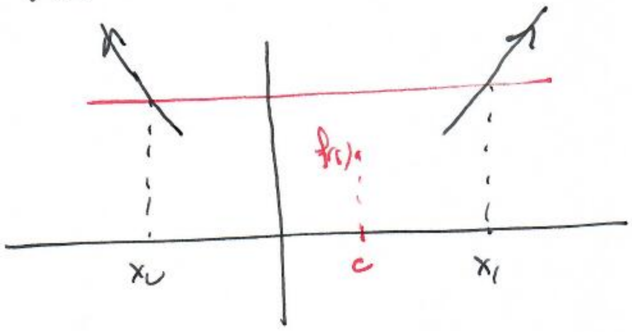
b) $f(x) = x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \quad + a_0 =$

$$= x^{2k+1}\Big(\underbrace{1}_{\downarrow\,1} + \underbrace{\frac{a_{2k}}{x} + \quad + \frac{a_0}{x^{2k+1}}}_{\downarrow\, x\to\pm\infty\ \ 0}\Big)$$

Luego $\lim_{x\to-\infty} x^{2k+1} = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} x^{2k+1} = \infty$.

PROBLEMA 11:] $f(x) = x^{2k} + a_{n-1}x^{n-1} + \quad + a_0$

Por el problema anterior $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$



Sea $M>0$ tal que $\exists x_0<0$ y $x_1>0$ tal que $f(x)\geq M$ y $f(x)\geq M$ para todo $x\in \mathbb{R}-[x_0,x_1]$

Para $c\in\mathbb{R}$ cualquiera, podemos tomar $M > f(c)$ y x_0 y x_1 de modo que $c\in(x_0,x_1)$.

Ahora $f|[x_0\ x_1]$ alcanza un mínimo (f continua y $[x_0\ x_1]$ cerrado y acotado) sea y tal que $f(y)\leq f(x)$ $\forall x\in[x_0\ x_1]$

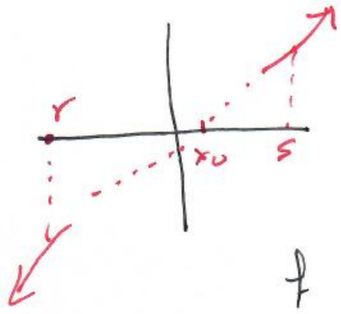
En particular $f(y)\leq f(c) < M$,

Así $f(y)\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

F. CONTINUAS Y UNIF. CONTINUAS

PROBLEMA 12:] $f(x) = x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_0$

POR EL PROBLEMA 10:]



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\quad\exists\, r<0$ con $f(r)<0$

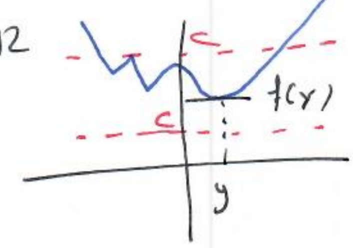
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\quad\exists\, s>0$ con $f(s)>0$

$f(r)\cdot f(s)<0$. Por f $[r,s]$ es continua y el th de Bolzano $\exists\, x_0 \in [r,s]$ con $f(x_0)=0$; al menos una raíz de la ecuación $f(x)=0$

PROBLEMA 13:] $f(x) = x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \dots + a_0$

POR EL PROBLEMA 11:] existe $y \in \mathbb{R}$ con

$f(y) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$



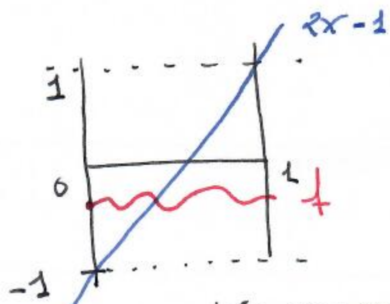
Luego si $c \geq f(y)$, $f(x)=c$ tiene solución.

Si $c < f(y)$, $f(x)=c$ no tiene solución.

PROBLEMA 14:] P polinomio, $|P(x)| \geq 0$ y $\lim_{x\to\pm\infty} |P(x)| = \infty$. Ahora se procede como en el ejercicio 11.

PROBLEMA 15:] Caso general de lo que se ve en probl. 11) y 14:)

PROBLEMA 16:]

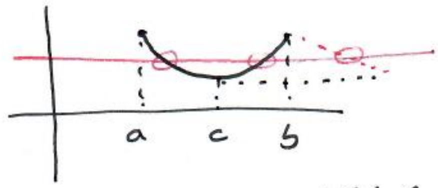


f no se anula
$f(x) \neq x \quad \forall x$
f no es sobreyectiva

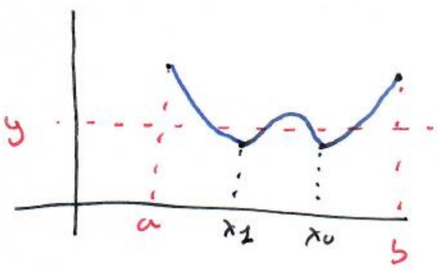
Si $f(0)=-1$ o $f(1)=1$, hemos terminado. Si no $f(0)>-1$ y $f(1)<1$.
Así $g(x) = f(x) - (2x-1)$ es continua con $g(0)\cdot g(1)<0$
por Bolzano existe $x_0 \in (-1,1)$ con $0 = g(x_0) = f(x_0) - (2x_0-1)$.

FUNC. CONTINUAS Y UNIFOR. CONTINUAS

PROBLEMA 17°| SEA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Y SEAN $a<b$ CON $f(a)=f(b)$

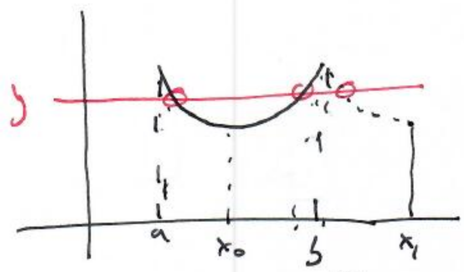


SI SUPONEMOS QUE f TOMA EXACTAMENTE DOS VECES CADA VALOR $y \in \operatorname{Im} f$, ENTONCES $f|_{[a,b]}$ NO ES CONSTANTE Y EXISTE $x_0 \in [a,b]$ CON x_0 MÁXIMO Ó MÍNIMO DE f EN $[a,b]$. EXISTE $x_1 \in \mathbb{R}$ CON $f(x_1)=f(x_0)$, ENTONCES



$x_1 \in (a,b)$

Ó BIEN



$x_1 \notin [a,b]$

EN AMBOS CASOS EL TEOREMA DE BOLZANO NOS ASEGURA QUE CIERTO $y \in \operatorname{Im} f$ SE ALCANZA AL MENOS TRES VECES.

PROBLEMA 18:| SEA $f:[a,b] \to \mathbb{Q}$ CONTINUA

NECESARIAMENTE f ES CONSTANTE.

SUPONGAMOS QUE $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$ CON $y_1 < y_2$

SEA $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ CON $y_1 < r < y_2$

POR EL TEOREMA DE BOLZANO EXISTE $x_0 \in [a,b]$ CON $f(x_0) = r \notin \mathbb{Q}$ LO CUAL NO ES POSIBLE.

SEA $A_1 = f^{-1}(\{x : f(x) < r\})$ Y $A_2 = f^{-1}(\{x : f(x) > r\})$

POR LA CONTINUIDAD DE f, A_1 Y A_2 SON ABIERTOS

CASO, SI $x_0 \in A_1$, $f(x_0) < r$, SEA $\varepsilon < \frac{|f(x_0)-r|}{2}$, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE PARA TODO $0 \le |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < r$

ASÍ $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq A_1$. LO MISMO PARA A_2

LUEGO $[a,b] = A_1 \cup A_2$, AMBOS ABIERTOS Y DISJUNTOS. LO CUAL NO ES POSIBLE. VEAMOS LO. $f|_{[a,b]}$ ACOTADA SEA $\alpha_1 = \sup\{f(x) : x \in A_1\} < r$ SEA $\alpha_2 = \inf\{f(x) : x \in A_2\} > r$.

NO EXISTE POR TANTO $x_0 \in [a,b]$ CON $f(x_0) = r$, LO QUE CONTRADICE EL TEOREMA DE BOLZANO

FUNC. CONTINUAS Y VARIF. CONTINUAS

PROBLEMA 19: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l_2$

ASI $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M_1 > 0$ tal que si $x > M_1 \Rightarrow$

$|f(x) - l_1| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$

$\exists M_2 < 0$ tal que si $x < M_2 \Rightarrow$

$|f(x) - l_2| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$

$f|_{[M_2, M_1]}$ es continua y por ser $[M_2, M_1]$ cerrado

f está acotada [Bung. y Mel $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [M_2, M_1]$]

en $[M_2, M_1]$.

ASI $|f(x)| \leq \max\{|l_1 - \varepsilon|, |l_1 + \varepsilon|, |l_2 - \varepsilon|, |l_2 + \varepsilon|, M\}$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 20: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{n}$

USAREMOS EL CRITERIO DE DIRICHLET.

$a_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$

$b_n = \frac{1}{n}$ decreciente y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ADEMÁS $A_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(x_{n+1}) - f(x_n) = f(\cancel{x_2}) - f(x_1) + f(x_3) - \cancel{f(x_2)} + \dots$

$\cancel{\dots} f(x_{N+1}) - \cancel{f(x_N)} = f(x_{N+1}) - f(x_1)$

$|A_N| = |f(x_{N+1}) - f(x_1)|$ ACOTADO

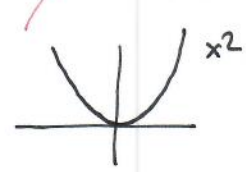
LUEGO EL CRITERIO NOS DICE QUE LA SERIE

CONVERGE.

FUNC CONTINUAS Y UNIF. CONTINUAS

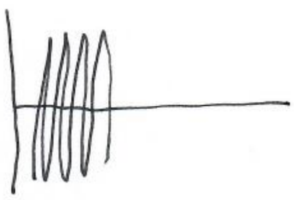
PROBLEMA Nº1:) a) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$ NO

SEA $\delta > 0$, $|f(x) - f(x+\delta)| = |\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2\delta x - \delta| =$



$= |\delta|\,|2x+1| \underset{x\to\infty}{\uparrow} \infty$

b) $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$ en $x \in (0, \infty)$ NO



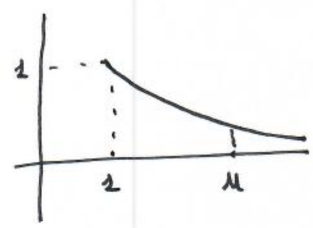
$x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $f(x_n) = 1$

$y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $f(y_n) = 0$

LUEGO $|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \ \forall n$

NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME

d) $f(x) = 1/x^2$ en $(1, \infty)$ SI



COMO $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = 0$

PARA $\varepsilon > 0$ $\exists M$ TAL QUE SI EXISTE $M > 0$

TAL QUE SI $x \geq M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon/3$

$f|_{[1,M]}$ ES UNIFORMEMENTE CONTINUA YA QUE SI f ES CONTINUA Y $[1, M]$ ES CERRADO

ASÍ PARA $\varepsilon > 0$, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE SI $x, y \in [1, M]$ Y $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$.

LUEGO PARA $\varepsilon > 0$, SI $|x-y| < \delta$ SE TIENE QUE:

SI $x, y > M \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$.

SI $x, y \in [1, M] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon/3$

SI $x \in [1, M]$ Y $y > M \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(M)|}_{|x-M| < \delta} + \underbrace{|f(M) - f(y)|}_{M, y \geq M}$

$\leq \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 < \varepsilon$.

POR DEFINICIÓN, f ES UNIFORMEMENTE CONTINUA.

Func. continuas y unif. continuas.

Problema 22:) Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in A$ y $|x-y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Para ese $\delta > 0$, por ser (x_n) sucesión de Cauchy existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n, m \geq n_0$ se sigue que $|x_n - x_m| < \delta$

y por tanto $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Problema 23:) Sean $\alpha = \inf A$ y $\beta = \sup A$, existen, ya que f está acotada

Supongamos que f no está acotada. Así para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ con

$$|f(x_n)| > |f(x_{n-1})| + n. \iff |f(x_n)| - |f(x_{n-1})| > n$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_{n-1})| \geq \big||f(x_n)| - |f(x_{n-1})|\big| > n$$

Como $(x_n) \subseteq [\alpha, \beta]$, por el teorema de Bolzano Weierstrass, existe $x_{n_k} \to \alpha$.

Luego para $\varepsilon = 1$ y para todo $\delta > 0$, existe un k_0 tal que $\forall\, n_k, n_{k+1} > n_k$ se tiene que $|x_{n_k} - x_{k+1}| < \delta$ } (x_n) de Cauchy

y $|f(x_{n_{k+1}}) - f(x_{n_k})| \geq n_k \uparrow \infty$

luego f no sería uniformemente continua.

Problema 24:) Ver problema 19:)

Problema 25:) Existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y existe $\lim_{x \to b^-} f(x)$. Por ser monótona y acotada. Luego f en $x=a$ y $x=b$ tiene discontinuidades evitables; se puede extender f de forma continua a $[a,b]$.

FUNC. CONTINUAS Y UNIF. CONTINUAS

PROBLEMA 26:] Sea $f\ (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

a) Si existe $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ prolongación de f al intervalo $[a,b]$ con continuidad, entonces $f|[a,b]$ es uniformemente continua y por $f|[a,b]$ es " ".

tamb. $f|(a,b)$ es uniformemente continua en (a,b).

b) Si f es uniformemente continua. Por ser (x_n)
Sea $(x_n) \subseteq (a,b)$ con $x_n \to a$. Por ser (x_n) de Cauchy (PROBLEMA 22) $(f(x_n))$ es de Cauchy. Sea $f(a) = r$.
Así $(f(x_n)) \to r$.
f así definida es continua en a, ya que si existiese $y_n \to a$ con $f(y_n) \to s \neq r$, se tendría que $|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pero

$|f(x_n) - f(y_n)| \to |r - s| > 0$

tendríamos que f no sería uniformemente continua.

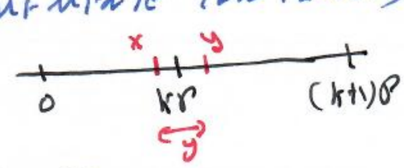
Por otro lado por la caracterización de la continuidad por sucesiones, f es continua en $x = a$.

Lo mismo se hace para $x = b$.

PROBLEMA 27:] a) $f|[0,p]$ es continua y acotada ya que $[0,p]$ es cerrado ($f(0) = f(p)$). Ahora $\forall x \in \mathbb{R}$ existe $r \in [0,p]$ y $k \in \mathbb{Z}$ con $x = r + kp$ luego f acotada

$f(x) = f(r)$

b) $f|[0,p]$ es uniformemente continua, luego lo es en todo $\mathbb{R}$



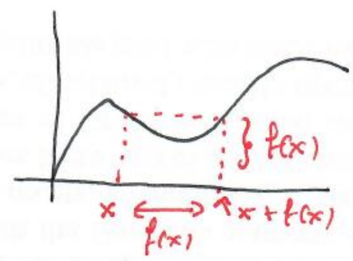
$|f(x) - f(y)| \leq$
$\leq |f(x) - f(kp)| +$
$+ |f(kp) - f(y)|$.

c) $\operatorname{sen} x$ unif. continua en $\mathbb{R}$.
$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\ (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ continua, pero no en $[-\pi/2, \pi/2]$.

TEOREMA DE BOLZANO   FUNC CONTINUAS Y UNIF. CONTINUAS

PROBLEMA 28/ SEA $f\ [0,1] \to [0,+\infty)$ CONTINUA CON $f(0)=f(1)=0$ Y $f(x)>0\ \forall x\in(0,1)$. DEMUESTRA QUE EXISTE UN CUADRADO CON DOS VÉRTICES EN EL INTERVALO $[0,1]$ DEL EJE DE ABSCISAS Y OTROS DOS SOBRE LA GRÁFICA DE f

SOLV



TENDREMOS QUE ENCONTRAR UN x TAL QUE $f(x+f(x)) = f(x)$.

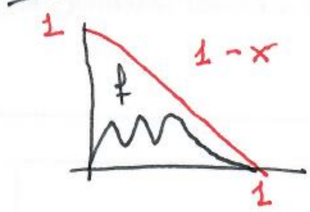
PARA ELLO DEFINIMOS

$$h(x) = f(x+f(x)) - f(x)$$

Y VAMOS A BUSCAR UN CERO EN h.

DOS CASOS.

1:] $f(x) \le 1-x \quad \forall x\in(0,1) \quad (\Rightarrow f(x)+x \le 1\ \forall x)$



$h\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA   ESTÁ DEFINIDA EN TODO $[0,1]$

$x \longrightarrow h(x) = f(x+f(x)) - f(x)$

EXISTE x_0 MÁXIMO DE f Y ASÍ

$h(x_0) = f(x_0 + f(x_0)) - \underbrace{f(x_0)}_{\text{MÁXIMO}} \le 0$

SEA $g(x) = x + f(x)$ CONTINUA EN $[0,1]$ Y $g(0)=0$ Y $g(1)=1$

LUEGO $\exists\, x_1$ TAL QUE $g(x_1) = x_0$ Y ASÍ

$h(x_1) = f(x_0) - f(x_1) \ge 0$

LUEGO POR EL TEOREMA DE BOLZANO $\exists\, x \in [x_1, x_0]$ ó $[x_0, x_1]$ TAL QUE $h(x) = 0$.

2:] $\exists\, \beta < 1 \quad \min\{x\in[0,1] : f(x) = x-1\}$.

SEA $h\ [0,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

$x \longrightarrow h(x) = f(x+f(x)) - f(x)$

$h(\beta) = f(\beta + f(\beta)) - f(\beta) = f(\beta + 1 - \beta) - f(\beta) = -f(\beta) < 0$

AHORA $g\ [0,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x + f(x)$, $g(0)=0$ Y $g(\beta) = 1$

LUEGO $\exists\, x_1 \in [0,\beta]$ CON $g(x_1) = x_1 + f(x_1) = x_0$ MÁXIMO DE f

LUEGO $h(x_1) = f(g(x_1)) - f(x_1) = f(x_0) - f(x_1) \ge 0$

DE NUEVO POR EL TEOREMA DE BOLZANO $\exists\, x \in [x_1, \beta]$ TAL QUE $h(x) = 0$.