FUNCIONES CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE CONTINUAS.

1.- Para cada una de las funciones siguientes, decide cuáles están acotadas superiormente e inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas tienen puntos máximos o mínimos.(Observese que f puede tener estas propiedades aún no siendo continua y aunque el intervalo no sea cerrado).

a) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$ **b)** $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$

c) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$ **d)** $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq a \\ \\ a+2 & \text{si} \quad x > a, \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$

f) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \text{ es racional,} \end{cases}$ en $[0, a]$

g) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x + \sqrt{1 + a^2})$ en $[0, a^3]$.

2.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas de modo que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$¿Es cierto que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

3.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas de modo que $f(a) < g(a)$ y $g(b) < f(b)$. prueba que existe $x \in [a, b]$ de modo que $f(x) = g(x)$.

4.- Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua. Prueba que existe $x \in [0, 1]$ de modo que $f(x) = x$.

5.- Demuestra que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = x - 1$.

6.- Sea $f : [0, 2] \to [0, 2]$ continua, con $f(0) = f(2)$. Demuestra que existen $x, y \in [0, 2]$ de modo que $|x - y| = 1$ y $f(x) = fy)$.

7.- a) Prueba que la ecuación $x^{15} + \dfrac{x^{14} - 17x + 13}{(x^2 - 1)^2} = 0$ tiene al menos una solución.

b) Si $\alpha < \beta$, prueba que la ecuación $\dfrac{x^2 + 1}{x - \alpha} + \dfrac{x^6 + 1}{x - \beta} = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (α, β).

8.- Para cada una de las funciones polinómicas siguientes f halla un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún $x \in [n, n + 1]$:

a) $f(x) = x^3 - x + 3$ **b)** $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

c) $f(x) = x^5 + x + 1$ **d)** $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

9.- Prueba que si la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $t_1, t_2, ..., t_n \in [a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ de modo que

$$f(c) = \frac{f(t_1) + f(t_2) + ..., f(t_n)}{n}.$$

10.- Sea $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Prueba que:

a) si P es de grado par, entonces $\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \infty$;

b) si P es de grado impar, entonces $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \infty$

11.- Sea $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ con grado par. Prueba que existe $y \in \mathbb{R}$ de modo que $P(y) \leq P(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

12.- Sea n impar y sea la ecuación:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0.$$

Prueba que esta ecuación tiene al menos una raíz.

13.- Sea la ecuación $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = c$, con n par. Prueba que existe un número y de modo que la ecuación tiene solución para $c \geq y$ y no la tiene para $c < y$.

14.- Sea $P(x)$ una función polinómica cualquiera. Prueba que existe $y \in \mathbb{R}$ de modo que $|P(y)| \leq |P(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

15.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continua, $f(x) > 0$ y con $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Prueba que existe un $y \in \mathbb{R}$ de modo que $f(y) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

16.- Sea $f : [0, 1] \to [-1, 1]$ continua, **no** necesariamente suprayectiva. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 0$.

b) Existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 2x_0 - 1$.

c) Existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

d) Para todo $r \in [-1, 1]$ existe $x_0 \in [0, 1]$ de modo que $f(x_0) = r$.

17.- Demuestra que no existe ninguna función continua f definida en todo $\mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada uno de sus valores.

18.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{Q}$ una función continua ¿Qué se puede decir de ella?

19.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Prueba que f está acotada.

20.- Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $(x_n)_n$ una sucesión contenida en $[a, b]$. Demuestra que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{n}$$

es convergente.

21.- Estudia si son uniformemente continuas las funciones siguientes en los dominios que se indican:

a) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$ **b)** $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$ en $(0, \infty)$

c) $f(x) = 1/x^2$ en $(0, \infty)$ **d)** $f(x) = 1/x^2$ en $(1, \infty)$

e) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en $\mathbb{R}$ **f)** $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ en $(-1, 1)$

g) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ en $(2, \infty)$ **h)** $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$ en $(0, 1)$.

22.- Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, f uniformemente continua y $(x_n)_n \subseteq A$ una sucesión de Cauchy. Prueba que $(f(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy. (No se puede utilizar el hecho de que $(x_n)_n$ es convergente).

23.- Sea $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$ y acotado, f uniformemente continua. Prueba que $f(A)$ está acotado.

24.- Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ continua y tal que existe $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Prueba que f es uniformemente continua.

25.- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monótona, continua y acotada. Prueba que f es uniformemente continua.

26.- Demuestra que para que una función f definida y continua en un intervalo acotado (a, b) se puede prolongar con continuidad al intervalo $[a, b]$ es condición necesaria y suficiente que f sea uniformemente continua en (a, b).

27.- Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica* en $\mathbb{R}$ si existe $p > 0$ de modo que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Demuestra que una función continua y periódica está acotada.

b) Demuestra que una función continua y periódica es uniformemente continua.

c) ¿Es la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ uniformemente continua en $\mathbb{R}$? ¿Y la función $g(x) = \tan x$?

28.- Sea $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ una función continua de modo que $f(0) = f(1) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, 1)$. Demuestra que existe un cuadrado con dos vértices en el intervalo $(0, 1)$ del eje de abcisas y otros dos en la gráfica de f.