AVR PRÁCTICA-1

Nombre y apellidos..

1.- Encuentra $\delta > 0$ de modo que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

donde $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$ y $\epsilon = 1/3$.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$, ASÍ $f(1) = 1/2$

$$|f(x) - f(1)| = \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1-x}{2x+1} \right| = |x-1| \left| \frac{1}{2x+1} \right|$$

OBSERVAMOS QUE SI x ESTÁ CERCA DE 1 ENTONCES $\frac{1}{2x+1}$ ESTÁ CERCA DE $1/3$; EN CONCRETO

SI $x \in [1 - 1/2, 1 + 1/2] = [1/2, 3/2]$, ENTONCES $\frac{1}{4} \le \frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2}$

QUEREMOS QUE $|x-1| \left| \frac{1}{2x+1} \right| < 1/3 \Rightarrow |x-1| < 1/3\, |2x+1| \in \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$

$\downarrow$ $x \in [1/2, 3/2]$

LUEGO SI $\boxed{|x-1| < \min\{1/2, 2/3\} = \frac{1}{2} = \delta}$, ENTONCES

$$|x-1| \left| \frac{1}{2x+1} \right| < 1/2 \cdot 1/2 = \frac{1}{4} < 1/3.$$

2.-Encuentra la función f^{-1} y su dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x}}$. Cálcula sus límites. (**Indicación:** despeja la x en función de la y).

ESCRIBIMOS $y = \frac{1}{x - \sqrt{x}}$ CON $x > 0$ Y $x \neq 1$.

TRATAMOS DE DESPEJAR LA "x". ASÍ $yx - y\sqrt{x} - 1 = 0$

COMO SIEMPRE $y \neq 0$, $x - \sqrt{x} - \frac{1}{y} = 0$. SI $z = \sqrt{x}$

TENEMOS $z^2 - z - \frac{1}{y} = 0$ ECUACIÓN DE 2º GRADO

DESPEJAMOS

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 + 4/y}}{2} \quad z = \sqrt{x} > 0$$

ASÍ

$$x = \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{y+4}{y}}}{2} \right)^2$$

$$\mathrm{Dom}\, f^{-1} = (-\infty, -4] \cup (0, \infty).$$

continuacion de 2.

VEAMOS LOS LÍMITES DE f^{-1}

$\lim_{x\to -\infty} f^{-1}(x) = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x) = \infty$

$\lim_{x\to \infty} f^{-1}(x) = 1$; $f(-4) = \frac{1}{4}$

3.- Encuentra dos funciones f y g con $Imf \subseteq Domg$, de modo que existen los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to f(a)} g(x)$$

y tales que

$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) \neq g(f(a)).$$

SI f FUESE CONTINUA EN $x = a$ Y
SI g " EN $x = f(a)$, LA COMPOSICIÓN
DE FUNCIONES CONTINUAS LO ES Y TENDRÍAMOS QUE

$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) = g(f(a)).$$

TENEMOS QUE BUSCAR f O g NO CONTINUAS.

SEA $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{SI } x \neq 0 \\ 2 & \text{SI } x = 0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$. NO CONTINUA.

SEA $g(x) = x$ CONTINUA ; $\lim_{x\to f(0)} x = \lim_{x\to 2} x = 2.$

AHORA $Im f = (0, \infty) \subseteq Dom\, g = \mathbb{R}$, Y

$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \neq g(f(0)) = 2$$

$\boxed{a = 0}$