AVR PRÁCTICA-2

Nombre y apellidos...

1.- Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas ¿ lo son las funciones $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ y $h_3(x) = |f(x)|$?

SEA $a \in \mathbb{R}$; SI $f(a) < g(a)$ (SI $g(a) < f(a)$ SE PROCEDE DE FORMA ANÁLOGA)

$\overset{\varepsilon}{\longleftrightarrow}$ $f(a)$ $\overset{\varepsilon}{\longleftrightarrow}$ $g(a)$

SEA $\varepsilon < \frac{g(a)-f(a)}{2}$, EXISTE δ_1 Y δ_2

$f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ CON $0 \le |x-a| < \delta_1$ $\Rightarrow$

$g(x) \in (g(a)-\varepsilon, g(a)+\varepsilon)$ Y $0 \le |x-a| < \delta_2$ $\Rightarrow$

SEA $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ SI $0 \le |x-a| < \delta$ $\Rightarrow$ $\max\{f(x), g(x)\} = g(x)$, POR SER g CONTINUA, h_1 TAMBIÉN LO ES EN a.

SI $f(a) = g(a)$ SEA $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ SI $0 \le |x-a| < \delta$

ENTONCES $|\max\{f(x), g(x)\} - f(a)| = \begin{cases} |f(x)-f(a)| < \varepsilon \\ |g(x)-g(a)| < \varepsilon \end{cases}$

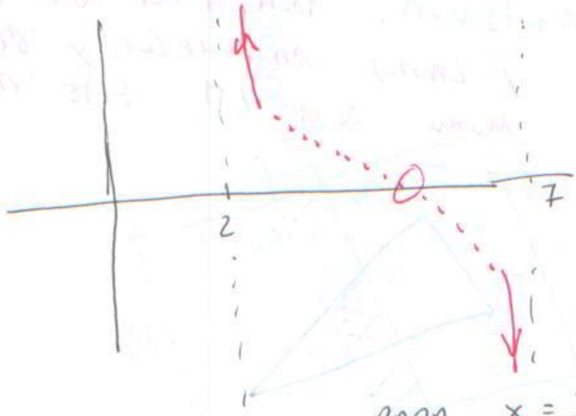
Y ASÍ h_1 TAMBIÉN ES CONTINUA EN a.

DE FORMA ANÁLOGA PARA h_2.

$h_3(x) = |f(x)|$, ASÍ $\big||f(x)| - |f(a)|\big| \le |f(x) - f(a)|$. SI f ES CONTINUA EN a, TAMBIÉN LO ES h_3

2.- Encuentra un ejemplo de una función $f : (2,7) \to \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $(2,7)$, con $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 7^-} f(x) = -\infty$, y tal que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(2,7)$. Justifica el ejemplo propuesto.

DIBUJAMOS

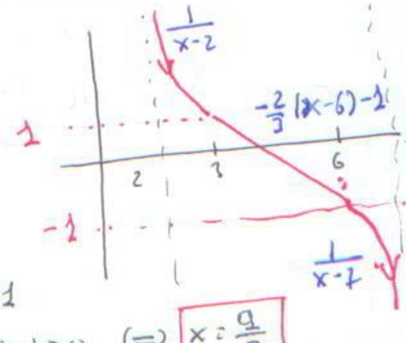


TOMAMOS $\frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^+]{} \infty$ PARA $x = 3$ $\frac{1}{3-2} = 1$

TOMAMOS $\frac{1}{x-7} \xrightarrow[x \to 7^-]{} -\infty$ PARA $x = 6$ $\frac{1}{6-7} = -1$

TOMAMOS LA RECTA QUE UNE $(3,1)$ Y $(6,-1)$, LA FUNCIÓN

$$y = \frac{2}{-3}(x-6) - 1$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{SI } x \in (2,3) \\ \frac{2}{-3}(x-6) - 1 & \text{SI } x \in [3,6] \\ \frac{1}{x-7} & \text{SI } x \in (6,7) \end{cases}$$

f ES CONTINUA $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 6^-} f(x) = \lim_{x\to 6^+} f(x) = -1$

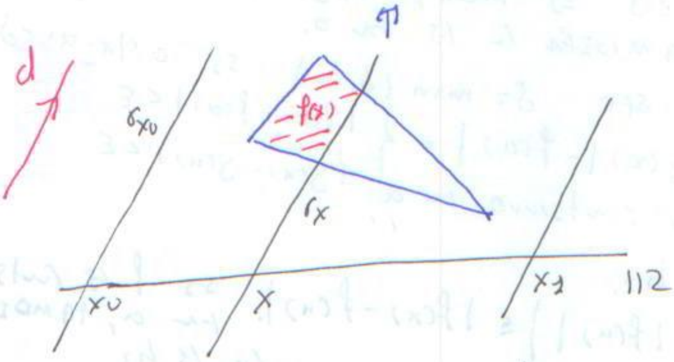
Y $f(x) = 0 \iff \frac{2}{-3}(x-6) - 1 = 0 \iff \boxed{x = \frac{9}{2}}$

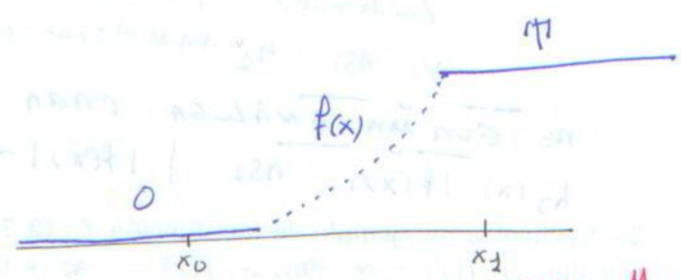
3.- Sea $\vec{d}$ una dirección en el plano y T un triángulo. Prueba que existe una recta con dirección $\vec{d}$ de modo que divide al triángulo en dos partes de áreas iguales.

0)

1) DEFINIMOS $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$

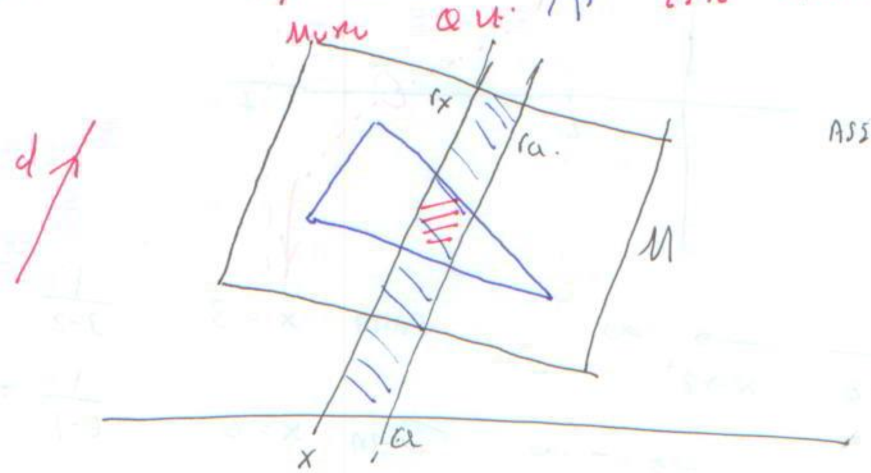
$x \longrightarrow f(x) =$ ÁREA DE T A LA IZQUIERDA DE r_x DONDE r_x ES LA RECTA DE DIRECCIÓN $\vec{d}$ Y QUE PASA POR $(x, 0)$





2) GRÁFICA DE f

3) f ES CONTINUA. TRAZAMOS UN CUADRADO DE LADO M. DE LADOS PARALELOS Y PERPENDICULARES A $\vec{d}$, Y LADOS MODO QUE T ESTÉ DENTRO DEL CUADRADO



ASÍ $|f(x) - f(a)| \leq$

EN ROJO

$\leq M|x-a| \xrightarrow[x \to a]{} 0$

EN AZUL

4) COMO $f(x_0) = 0$ Y $f(x_1) = T$ Y f ES CONTINUA EXISTE $c \in (x_0, x_1)$ TAL QUE $f(c) = \frac{T}{2}$ (POR EL TEOREMA DE LA CONSERVACIÓN DE LA CONEXIÓN) POR TANTO r_c DIVIDE AL TRIÁNGULO EN DOS PARTES DE ÁREAS IGUALES.