AVR PRÁCTICA-3

Nombre y apellidos...

1.- ¿Cuál de las funciones que se indican es uniformemente continua en su dominio?

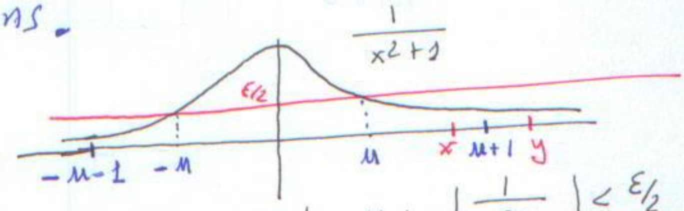
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\quad x \in (0, \infty)$. $\quad$ •) $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ y $\left|f(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n+1}})\right| = |n - n-1| = 1 \ \forall n.$
- $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $\quad x \in (0, \infty)$. $\quad$ •) $\frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \to 0$ y $\frac{1}{\pi + 2n\pi} \to 0$ y
- $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

$\left|\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - \operatorname{sen}(\pi + 2n\pi)\right| = 1$

Justifica tu respuesta.

Los ejemplos anteriores indican que las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $(0,\infty)$ y $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ en $(0,\infty)$ NO son uniformemente continuas.

— o —



$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists M > 0$ tal que si $x > M$, entonces $\left|\frac{1}{x^2+1}\right| < \varepsilon/2$.

Ahora $f \ [-M-1, M+1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua en $[-M-1, M+1]$; luego dado $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta < 1$ tal que si $x, y \in [-M-1, M+1]$ y $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ahora sea $x, y \in \mathbb{R}$ con $\boxed{|x-y| < \delta < 1}$

Si $x, y > M$ ó $x, y < -M \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

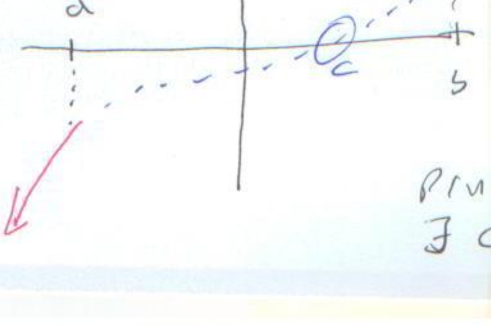
Si $x, y \in [-1-M, M+1] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Si $x < M+1$ y $y > M+1 \Rightarrow x, y > M$; si $y < -M-1$ y $x > -M-1 \Rightarrow x, y < -M$.

2.- Sea $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$.
a) Si n es par, prueba que $\lim_{x\to\infty} = \infty$.
b) Si n es impar, entonces la ecuación $P(x) = 0$ al menos tiene una solución real.

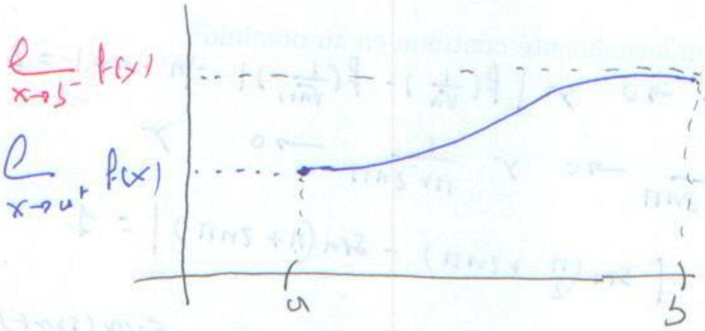
a) $P(x) = x^n \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 1} \xrightarrow{x \to \pm\infty} \infty$ luego que $\lim_{x\to\infty} x^{2k} = \infty$.

b) $P(x) = x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right) \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{si } x \to -\infty \\ \infty & \text{si } x \to +\infty \end{cases}$



$\exists a < 0$ con $P(a) < 0$
$\exists b > 0$ con $P(b) > 0$, como
$P \ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y
$P(a) \cdot P(b) < 0$, el teorema de Bolzano
$\exists\ c \in [a, b]$ tal que $P(c) = 0$.

3.- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función monótona, continua y acotada. Prueba que f es uniformemente continua en (a, b).



POR SER f MONÓTONA EXISTEN: $\lim_{x\to a^+} f(x)$ Y $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

DEFINIMOS
$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{SI } x \in (a,b) \\ \lim_{x\to a^+} f(x) & \text{SI } x = a \\ \lim_{x\to b^-} f(x) & \text{SI } x = b. \end{cases}$$

ESTA FUNCIÓN $\hat{f}$ ES CONTINUA EN TODO $[a,b]$ YA QUE SI $x \in (a,b)$, $f(x) = \hat{f}$ Y ALLÍ f ES CONTINUA.

$$\hat{f}(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Y $$\hat{f}(b) = \lim_{x\to b^-} f(x).$$

LUEGO POR TEORÍA $\hat{f}$ ES UNIFORMEMENTE CONTINUA EN $[a,b]$. DE LA DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD UNIFORME $f = \hat{f}|(a,b)$ ES TAMBIÉN UNIFORMEMENTE CONTINUA.