EXAMEN FINAL. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
18 de Enero de 2023.

1.- Dada la sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4}$$

Estudia su convergencia puntual y uniforme tanto en el intervalo $[0,a]$, como en el intervalo $[a,+\infty)$, con $a>0$.

2.- Encuentra la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-|x|} senx$.
(**Indicación:** Se puede usar que

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = 1/2[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

y que

$$\operatorname{sen} A \cos B = 1/2[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]\ ).$$

3.- Resuelve el problema de valores iniciales: $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = (x^2+x)\, e^{3x} \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0 \end{cases}$

4.- Calcula en $\mathbb{Z}_{91}$ el número $a = 39^{26\times 54} \times 30^{576} - 455$.
(**Indicación:** ¿91 es un número primo?).

5.- Sea $(G,*)$ un grupo cíclico con $|G| = 6$ elementos. Sea a un generador de G y e el elemento neutro:

5.1) Escribe todos los elementos de G expresados en términos de a. ¿Cuál es el orden de a?

5.2) ¿Cuál es el orden de cada elemento de G? ¿ Cuál es el orden de cada a^k, $0 \le k < 6$?

5.3) Expresa a^m, $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 6$, en términos de a^k, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k < 6$.

5.4) ¿Cuántos subgrupos tiene el grupo G? Describe cada uno de estos subgrupos por sus elementos.

6.- Consideramos $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3[x]/ < x^2+1 >$.

6.1) ¿Es un cuerpo? ¿ Cuáles son sus elementos?¿Cuántos elementos tiene?

6.2) Calcula $(x-1)^3$ y $(x-1)^{125}$ en $\mathbb{K}$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen:

.- **Presencial .**

.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-22-23/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/

La revisión del examen se efectuará el día 31 de Enero a las 16 h en el aula 11. No es obligatorio asistir la revisión.

PROBLEMA 1:) $f_n(x) = \dfrac{2nx^2}{1+n^2x^4}$

- LÍMITE PUNTUAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} = \begin{cases} 0 & \text{SI } x=0 \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2x^2}{\frac{1}{n}+nx^4} = 0 & \text{SI } x\neq 0 \end{cases}$$

POR TANTO $f\equiv 0$ ES LA LÍMITE PUNTUAL

- CONVERGENCIA UNIFORME EN $[a,\infty)$ $a>0$

$$\left|0 - \frac{2nx^2}{1+n^2x^4}\right| \underset{x\neq 0}{=} \left|\frac{2n}{\frac{1}{x^2}+n^2x^2}\right| \leq \frac{2n}{n^2a^2} = \frac{2}{na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

LUEGO $f_n \longrightarrow 0$ UNIFORMEMENTE EN $[a,\infty)$, $a>0$.

- CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0,a]$ $a>0$.

DIBUJAMOS $f_n(x) = \dfrac{2nx^2}{1+n^2x^4} \geq 0$ Y $f(0)=0$, PARA $x\in[0,a]$.

$$f_n'(x) = \frac{4nx\left[1+n^2x^4\right] - 2nx^2\left[4n^2x^3\right]}{(1+n^2x^4)^2} =$$

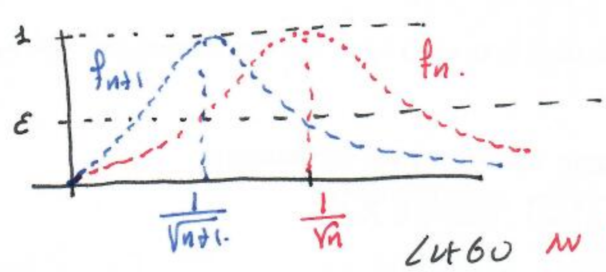
$$= \frac{4nx + 4n^3x^5 - 8n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{4nx - 4n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2} =$$

$$= \frac{4nx\left[1-n^2x^4\right]}{(1+n^2x^4)^2} \begin{cases} =0 & \text{SI } x=0 \text{ ó } x=\frac{1}{\sqrt{n}} \\ >0 & \text{SI } x<\frac{1}{\sqrt{n}} \\ >0 & \text{SI } x>\frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ES UN MÁXIMO RELATIVO CON

$$f_n\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

ASÍ $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Y $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$



PARA $0<\varepsilon<1$, NO ES POSIBLE QUE $|0 - f_n(x)| < \varepsilon$ $\forall x\in[0,a]$

LUEGO NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0,a]$.

PROBLEMA 2: $f(x) = e^{-|x|}\operatorname{sen} x$

¿TRANSFORMADA DE FOURIER?

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\operatorname{sen} x\; e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\operatorname{sen} x \cos\lambda x\, dx}_{\text{IMPAR.}} + i\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\lambda x\, e^{-|x|}}_{\text{PAR}}\, dx =$$

LA INTEGRAL SE ANULA

$$= 2i\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\lambda x\; e^{-x}\, dx \underset{\text{INDICACIÓN}}{=}$$

$$= 2i\int_0^{\infty} \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-\lambda x) - \cos(x+\lambda x)\right] e^{-x}\, dx =$$

$$= i\left[\int_0^{\infty} \cos(x-\lambda x)\, e^{-x}\, dx - \int_0^{\infty} \cos(x+\lambda x)\, e^{-x}\, dx\right.$$

RESOLVEMOS ESTA DOS INTEGRALES POR PARTES

•) $$\int_0^{\infty} \cos((1-\lambda)x)\, e^{-x}\, dx = -\cos(1-\lambda)x\, e^{-x}\Big|_0^{\infty} - (1-\lambda)\int_0^{\infty} \operatorname{sen}((1-\lambda)x)\, e^{-x}\, dx$$

$$= 1 - (1-\lambda)\left[\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(1-\lambda)x\; e^{-x}\, dx\right] \underset{\text{PARTES}}{=} 1 - (1-\lambda)\Big[\underbrace{-\operatorname{sen}(1-\lambda)x\, e^{-x}\Big|_0^{\infty}}_{=0}$$

$$+ (1-\lambda)\int_0^{\infty} \cos(1-\lambda)\, e^{-x}\, dx\Big] = 1 - (1-\lambda)^2\int_0^{\infty} \cos(1-\lambda)x\, e^{-x}\, dx$$

DESPEJANDO $$\int_0^{\infty} \cos((1-\lambda)x)\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{1+(1-\lambda)^2}$$

••) $$\int_0^{\infty} \cos((1+\lambda))\, e^{-x}\, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \text{- - - -} = \frac{1}{1+(1+\lambda)^2}$$

LUEGO $$\hat{f}(\lambda) = i\left[\frac{1}{1+(1-\lambda)^2} - \frac{1}{1+(1+\lambda)^2}\right] =$$

$$= i\,\frac{\cancel{1}+(1+\lambda)^2 - \cancel{1} - (1-\lambda)^2}{(1+(1-\lambda)^2)(1+(1+\lambda)^2)} \underset{\text{DIFERENCIA DE CUADRADOS}}{=} i\,\frac{[(1+\cancel{\lambda})+(1-\cancel{\lambda})]\,[(\cancel{1}+\lambda)-(\cancel{1}-\lambda)]}{(1+(1-\lambda)^2)(1+(1+\lambda)^2)}$$

$$= i\,\frac{4\lambda}{(1+(1-\lambda)^2)(1+(1+\lambda)^2)}.$$

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = (x^2+x)e^{3x} \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

- Ec característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

LUEGO $\boxed{y(x) = k_1 e^{x} + k_2 e^{2x}}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA

- SOLUCIÓN PARTICULAR: COMO $\lambda = 3$ NO ES SOLUCIÓN DE LA EC. CARACTERÍSTICA,

PROBAMOS UNA SOLUCIÓN $y_0(x) = (ax^2+bx+c)e^{3x}$

$$y_0'(x) = (2ax+b)e^{3x} + 3(ax^2+bx+c)e^{3x} =$$
$$= [3ax^2 + (2a+3b)x + (b+3c)]e^{3x}$$

$$y_0''(x) = (6ax + 2a+3b)e^{3x} + 3e^{3x}[3ax^2 + (2a+3b)x + (b+3c)] =$$
$$= [9ax^2 + (12a+9b)x + (2a+6b+9c)]e^{3x}$$

ENTRANDO EN LA EDO CON y_0, y_0' e y_0''

$$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = e^{3x}[\cancel{9a}x^2 + (12a+\cancel{9b})x + (2a+6b+\cancel{9c})$$
$$-\cancel{9a}x^2 + (-6a - \cancel{9b})x + (-3b - \cancel{9c})$$
$$+ 2ax^2 + 2bx + 2c] =$$

$$= [2ax^2 + (6a+2b)x + (2a+3b+2c)]e^{3x} = (x^2+x)e^{3x}$$

FORZAMOS LA IGUALDAD

ASÍ
$$\left.\begin{array}{lll} 2a = 1 & \Rightarrow & a = \frac{1}{2} \\ 6a+2b = 1 & \Rightarrow & b = -1 \\ 2a+3b+2c = 0 & \Rightarrow & c = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow y_0(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^{3x}$$

(COMPROBAR)

- SOLUCIÓN GENERAL

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^{3x} + k_1 e^{x} + k_2 e^{2x} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

- AHORA SI $0 = y(0) = 1 + k_1 + k_2$

$$y'(x) = (x-1)e^{3x} + 3\left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^{3x} + k_1 e^{x} + 2k_2 e^{2x}$$

SI $0 = y'(0) = -1 + 3 + k_1 + 2k_2$

EL SISTEMA
$$\begin{array}{l} k_1 + k_2 = -1 \\ k_1 + 2k_2 = -2 \end{array}$$
TIENE POR SOLUCIÓN

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 0 \qquad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -1$$

$$\boxed{\text{SOLUCIÓN} \quad y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^{3x} - e^{2x}.}$$

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = (x^2+x)e^{3x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}(y'' - 3y' + 2y)(s) = (s^2 - 3s + 2)\,\mathcal{L}y(s).$$

$$y \quad \mathcal{L}((x^2+x)e^{3x})(s) = \mathcal{L}(x^2e^{3x})(s) + \mathcal{L}(xe^{3x})(s) = $$

USANDO TABLAS

$$\frac{2}{(s-3)^3} + \frac{1}{(s-3)^2}$$

LUEGO $\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}\left[\frac{2}{(s-3)^3} + \frac{1}{(s-3)^2}\right] =$

$$= \frac{2}{(s-1)(s-2)(s-3)^3} + \frac{s-3}{(s-1)(s-2)(s-3)^3} = \frac{\cancel{s-1}}{(\cancel{s-1})(s-2)(s-3)^3} =$$

$$= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{(s-3)^2} + \frac{D}{(s-3)^3} =$$

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

$$= \frac{A(s-3)^3 + B(s-2)(s-3)^2 + C(s-2)(s-3) + D(s-2)}{(s-2)(s-3)^3} =$$

$$= \frac{A[s^3 - 9s^2 + 27s - 27] + B(s-2)(s^2-6s+9) + C[s^2-5s+6] + D(s-2)]}{(s-2)(s-3)^3}$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s-3)^3}\left[\begin{array}{l} A(s^3 - 9s^2 + 27s - 27) \\ B(s^3 - 6s^2 + 9s \\ \quad\quad -2s^2 + 12s - 18) \\ C(\quad s^2 - 5s + 6) \\ D\quad(s-2). \end{array}\right. =$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s-3)^3}\Big[(A+B)s^3 + (-9A - 8B + C)s^2 + (27A + 21B - 5C + D)s + (-27A - 18B + 6C - 2D)\Big] = \frac{1}{(s-1)(s-3)^3}$$

y TENEMOS EL SISTEMA

$$\begin{array}{ll} A + B & = 0 \\ -9A - 8B + C & = 0 \\ 27A + 21B - 5C + D & = 0 \\ -27A - 18B + 6C - 2D & = 1 \end{array}$$

RESOLVEMOS EL SISTEMA y

$A = -1$
$B = 1$
$C = -1$
$D = 1$

ASÍ $\mathcal{L}y(s) = \frac{-1}{s-2} + \frac{1}{s-3} + \frac{-1}{(s-3)^2} + \frac{2}{2}\frac{1}{(s-3)^3} \underset{\text{TABLAS}}{\Longrightarrow} \boxed{y(x) = -e^{2x} + e^{3x} - xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}}$

PROBLEMA 4:) ¿ $a = 39^{26\times 54} \times 30^{576} - 455 \in \mathbb{Z}_{91}$?

$91 = 7\times 13$, LUEGO $\mathbb{Z}_{91} \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{13}$

$a \longrightarrow ([a]_7, [a]_{13})$

COMO $mcd(39,7) = 1$ y $\phi(7) = 6$ EL TEOREMA

DE EULER NOS DICE QUE $39^{26\times 54} = [(39)^6]^{9\times 26} \equiv 1 \mod 7$

COMO $mcd(30,7) = 1$ y $\phi(7) = 6$ EL TEOREMA DE

EULER NOS DICE QUE $30^{576} = (30^6)^{96} \equiv 1 \mod 7$

576 | 6
36   96
0

y 455 | 7
35   65
0

$455 \equiv 0 \mod 7$

LUEGO $[a]_7 \equiv 1 \mod 7.$

POR OTRO LADO

$13 \mid 39$ LUEGO $39 \equiv 0 \mod 13$

y 455 | 13
065   35
0

LUEGO $455 \equiv 0 \mod 13$

POR TANTO $[a]_{13} \equiv 0 \mod 13$

EL NÚMERO QUE BUSCAMOS a VERIFICA QUE

$a \equiv 1 \mod 7$

$a \equiv 0 \mod 13$

POR EL TEOREMA CHINO DEL RESTO

$$\boxed{a = 1\times 13 \times [13]_7^{-1} = 1\times 13\times 6 = 78 \mod 91}$$

$13 \equiv 6 \mod 7$

$6\times 6 \equiv 1 \mod 7$

PROBLEMA 5:] $(G\ *)$ cíclico $|G|=6$. $G=\langle a\rangle$.

5.1] $G=\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6=e\}$ el orden de a es $\underline{6}$

5.2]

$$\begin{cases} a & \text{ord } a = 6 & \\ a^2 & \text{ord } a^2 = 3 & (a^2)^3 = e \\ a^3 & \text{ord } a^3 = 2 & (a^3)^2 = e \\ a^4 & \text{ord } a^4 = 3 & \text{mcm}(4,6)=12,\ (a^4)^3 = e \\ a^5 & \text{ord } a^5 = 6 & \text{mcd}(5,6)=1 \quad (a^5)^6 = e. \\ a^6 = e & \text{ord } e = 1. & \end{cases}$$

5.3] $a^m = a^{q6+k} = (a^6)^q a^k = e\cdot a^k = a^k$

$m \geq 6$

$$\begin{array}{l|l} m & 6 \\ \hline k & q \end{array}$$

5.4] Los subgrupos de G son cíclicos y su orden divide a 6

Subgrupo de orden 1 $\{e\}$

" de orden 2 $\{a^3\ (a^3)^2\} = \{a^3, e\}$

" de orden 3 $\{a^2, a^4, a^6\} = \{a^2, a^4, e\}$

" de orden 6 $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\} = G.$

PROBLEMA 6: $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$.

6.1 $f(x) = x^2+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ POLINOMIO DE GRADO 2

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 1 \neq 0 \\ f(1) &= 2 \neq 0 \\ f(2) &= 4+1 = 5 \equiv 2 \neq 0 \mod 3. \end{aligned}\right\} \text{NO TIENE RAÍCES}$$

ES IRREDUCIBLE.

LUEGO $\mathbb{K}$ ES UN CUERPO

$|\mathbb{K}| = 3^2 = 9$ Y

$\mathbb{K} = \{0, 1, 2, x, 2x, x+1, x+2, 2x+1, 2x+2\}$

6.2 $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 1$

$3 \equiv 0 \mod 3$

AHORA $x^3 = x \cdot x^2 = x(-1) = 2x$

$x^2+1=0$

ASÍ $\boxed{x^3 - 1 = 2x - 1 = 2x+2 \in \mathbb{K}}$

$\boxed{(x-1)^{125}} = (x-1)^{8\times15+5} = (\underbrace{(x-1)^8}_{=1})^{15}(x-1)^5 =$

$|\mathbb{K}^*| = 8$

$125 = 8 \cdot 15 + 5$

$= (x-1)^3(x-1)^2 = (2x+2)(x-1)^2 =$

$(x-1)^3 = 2x+2$

$= (2x+2)(x^2-2x+1) = x(2x+2) = 2(x^2+x) =$

$x^2+1=0$

$x^2+1=0$

$\boxed{= 2(2+x) = 1+2x \in \mathbb{K}}$