DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

PROBLEMA 1: MIRANDO LA TABLA DE DERIVADAS Y USANDO LA REGLA DE LA CADENA:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = x^{1/2} \\ f'(x) = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right)$

j) $$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x^2-1)'(x+1) - (x^2-1)(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x+1) - (x^2-1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2+1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = 1$$

O TAMBIÉN $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = x-1$

ASÍ $f'(x) = 1$.

k) $f(x) = \operatorname{Arc}\cos x$ USANDO LA DERIVADA DE UNA INVERSA

$$f'(x) = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arc}\cos x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\operatorname{Arc}\cos x)} \quad \operatorname{sen}x = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\operatorname{Arc}\cos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

n) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x)$

$$f'(x) = \cos(\cos^2 x)\, 2\cos x\,(-\operatorname{sen}x) = -\operatorname{sen}2x \cos(\cos^2 x)$$

$\operatorname{sen}2x = 2\cos x \operatorname{sen}x$

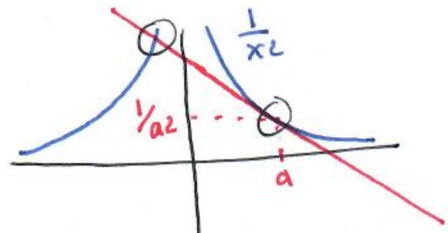
p) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen}(x^2+\ln(1/x))} = e^{\operatorname{sen}(x^2+\ln(1/x))\ln(x^2+1)}$

$a^x = e^{x\ln a}$

$$f'(x) = f(x)\left[\operatorname{sen}(x^2+\ln(1/x))\ln(x^2+1)\right]' = f(x)\left[\cos(x^2+\ln(1/x))\left(2x-\frac{1}{x}\right)\ln(x^2+1) + \operatorname{sen}(x^2+\ln(1/x))\frac{2x}{x^2+1}\right]$$

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 2)



$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

Luego para $x = a$ $\quad f'(a) = \frac{-2}{a^3}$

La recta tangente es

$$r(x) = \frac{-2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2}$$

Los puntos de corte son

$$\left\{ f(x) = r(x) \iff \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2} \right.$$

Si resolvemos la ecuación, claramente $x = a$, $\left(a, \frac{1}{a^2}\right)$ es una de las soluciones; para encontrar la otra, operamos

$$\boxed{\frac{a^3}{x^2}} = -2(x-a) + a = \boxed{-2x + 3a}$$

Así $\quad -2x^3 + 3ax^2 - a^3 = 0 \quad$ dividimos

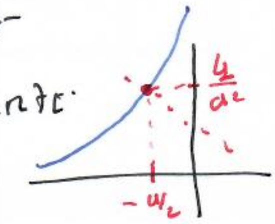
Como sabemos que a es raíz,

$$\begin{array}{rl|l}
-2x^3 + 3ax^2 & - a^3 & x - a \\ \cline{3-3}
2x^3 - 2ax^2 & & -2x^2 + ax + a^2 \\ \hline
ax^2 & - a^3 & \\
-ax^2 & + a^2x & \\ \hline
a^2x & - a^3 & \\
-a^2x & + a^3 & \\ \hline
& 0 &
\end{array}$$

$$\text{Luego} \quad -2x^3 + 3ax^2 - a^3 = (x-a)(-2x^2 + ax + a^2) =$$
$$= (x-a)^2(-2x - a)$$

Luego $x = -\frac{a}{2}$ nos da otra solución y

$\left(-a/2, \frac{4}{a^2}\right)$ es el otro punto de corte.



DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 3:

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x-a}$$

AHORA $h'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x-a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$

$\exists f'(a)$

$h'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x-a} = \lim_{x \to a^-} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$

$\exists g'(a)$

COMO $f'(a) = g'(a)$, EXISTEN AMBOS LÍMITES LATERALES Y SON IGUALES, POR LO TANTO EXISTE EL LÍMITE.

PROBLEMA 4:

SI $f(x) = \sqrt{1+x}$ f ES DERIVABLE EN $x=0$; ASÍ

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad y \quad f'(0) = 1/2$$

LUEGO $r(x) = \frac{1}{2}x + 1$ RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA DE f POR EL PUNTO $(0,1)$;

POR LAS PROPIEDADES DE LA TANGENTE.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - r(x)}{x - 0} = 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \simeq \frac{1}{2}x+1 \text{ SI } x \simeq 0.$$

PROBLEMA 5: SI EXISTE $f'(a)$, $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

ASÍ $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{2h} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f'(a) + f'(a)\right) = f'(a)$$

COMO EXISTEN LOS LÍMITES DE AMBOS SUMANDOS / PARA EL SEGUNDO TOMAR $r = -h \underset{h \to 0}{\to} 0$

EJEMPLO SEA $f(x) = |x|$ Y $a = 0$ $\lim_{h \to 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$;

PERO SABEMOS QUE f NO ES DERIVABLE EN $x = 0$.

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 6:) SUPONGAMOS QUE $f(x+T) = f(x) \ \forall x \in \mathrm{Dom} f$

existe $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{f \text{ periódica}}{=}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} \underset{\text{def}}{=} f'(x+T)$$

Luego f' es periódica

PROBLEMA 7:) $f(x) = \begin{cases} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

con $g(0) = g'(0) = 0$

existe $g'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(h)}{h}$.

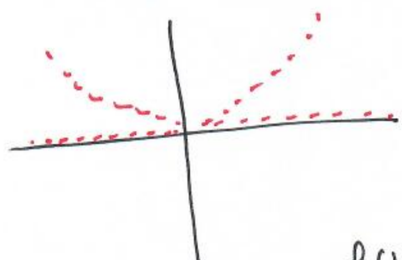
Ahora

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0 \text{ YA QUE}$$

$$\left| \frac{g(h)}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{h} \right| \leq \left| \frac{g(h)}{h} \right| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

PROBLEMA 8:)



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{Q}}} \dfrac{h^2}{h} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}}} \dfrac{0}{h} = 0 \end{cases}$$

En cualquier caso, $f'(0) = 0$

PROBLEMA 9:) APLICAMOS LA REGLA DE LA CADENA, SUPONIENDO f y g DERIVABLES DONDE CONVENGA

a) $f(x) = g(x + g(0))$ $\quad f'(x) = g'(x + g(0))$.

c) $f(x) = g(x\, g(x))$ $\quad f'(x) = g'(x)[g(x) + x\, g'(x)]$.

f) $f(x+3) = g(x^2) \underset{y = x+3}{\Rightarrow}$ $\quad f(y) = g((y-3)^2) \Rightarrow f'(y) = g'((y-3)^2)\, 2(y-3)$.

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 10: SEA $y(x) = \frac{f(x)}{x}$ SI $x \neq 0$

$y \; y(0) = f'(0)$.

CLARAMENTE: $f(x) = x\, y(x)$, INCLUSO PARA $x = 0$, YA QUE $f(0) = 0$.

ADEMÁS y ES CONTINUA EN CERO,

$$\lim_{x \to 0} y(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$$

EXISTE POR HIPÓTESIS EJERCICIO 8.

PROBLEMA 11: VER EL ESTUDIO DEL EJERCICIO 8.

PROBLEMA 12: $x = f(x)\, y(x)$ CON f Y y DERIVABLE

ENTONCES $1 = f'(x)\, y(x) + f(x)\, y'(x)$.

SI $f(0) = y(0) = 0$, SE TENDRÍA QUE $1 = 0$, LO CUÁL NO ES POSIBLE.

PROBLEMA 13: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

LUEGO DERIVANDO

$$\boxed{(f^{-1})''(x)} = \frac{-f''(f^{-1}(x))(f^{-1})'}{(f'(f^{-1}(x)))^2} = \boxed{\frac{-f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}}$$

PROBLEMA 14:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1} & \text{SI } x \in (0,\infty) \setminus 1 \\ 1 & \text{SI } x = 1 \\ 0 & \text{SI } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{x \ln x}{x-1}\right) = (0,\infty) \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{x-1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x-1} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

R. L'HÔPITAL

$\boxed{g \text{ ES CONTINUA EN } x = 0}$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x \frac{\ln x}{x-1} = 1 \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

R. L'HÔPITAL

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x \ln x}{x-1} = \ldots = 1$$

$\boxed{g \text{ ES CONTINUA EN } x = 1}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = \infty \; ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x \ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$$

NO ES DERIVABLE EN $x = 0$ 2 VECES L'HÔPITAL EXISTE $y'(1) = 1/2$

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 15:] DOS FUNCIONES CON IGUAL DERIVADAS SE DIFERENCIAN EN UNA CONSTANTE; ES DECIR SI $f' = g' \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ CON $f = g + k$

a) $f'(x) = \operatorname{sen} x$ SABEMOS QUE $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$.

LUEGO $f(x) = -\cos x + k$ $k \in \mathbb{R}$

MIRAR LA TABLA DE DERIVADAS

c) $f''(x) = x + x^2$; SEA $g = f'$

ASÍ $g'(x) = x + x^2$ COMO $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)' = x + x^2$

TENEMOS QUE $f' = g = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k$

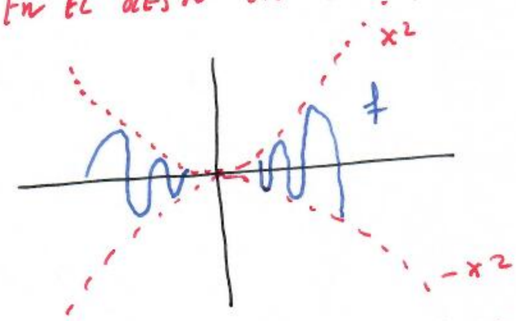
COMO $\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + kx\right)' = g$

TENEMOS QUE $\boxed{f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + kx + M}$ $k, M \in \mathbb{R}$

PROBLEMA 16:] $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x & \text{SI } x \neq 0 \\ 0 & \text{SI } x = 0 \end{cases}$

POR EL PROBLEMA 7:) f ES DERIVABLE EN $x=0$ CON $f'(0) = 0$

(¡Y EN EL RESTO DE $\mathbb{R}$!)



f NO PUEDE SER MONÓTONA YA QUE $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \pm\infty$ Y $\operatorname{sen} y$ VA CAMBIANDO DE SIGNO

$g(x) = f^2(x)$ POR LA REGLA DE LA CADENA

$g'(x) = 2 f(x) \cdot f'(x)$ ASÍ $g'(0) = 0$.

AHORA $g(x) = f^2(x) \geq 0$ PARA TODO x Y $g(0) = 0$, LUEGO $x=0$ ES UN MÍNIMO ABSOLUTO, POR TANTO TAMBIÉN LOCAL

$g'(x) = 2(x^2 \operatorname{sen} 1/x) \cdot \left(2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x}\right)$ $x \neq 0$ Y $g'(0) = 0$

LUEGO $g''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2x \operatorname{sen} 1/x \left[2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right] = 0.$

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 17:

$f(x) = 4x^3 - 3x \quad x \in [-2, 2]$

f es continua, es un polinomio.

$f'(x) = 12x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1/2$

Así
$$f(-2) = -32 + 6 = -26$$
$$f(-1/2) = -\frac{4}{8} + \frac{3}{2} = \frac{8}{12} = \frac{1}{3}$$
$$f(1/2) = \frac{4}{8} - \frac{3}{2} = \frac{-8}{12} = -1/3$$
$$f(2) = 32 - 6 = 26$$

Luego f alcanza un mínimo en $x = -2$ y un máximo en $x = 2$ para $x \in [-2, 2]$.

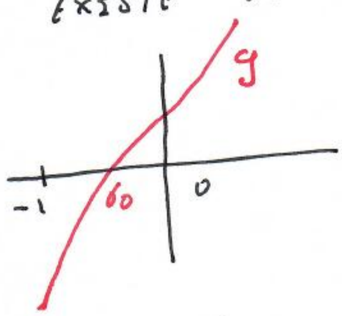
PROBLEMA 18:

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1} \quad x \in [-1, 1/2]$

Sea $g(x) = x^5 + x + 1$; $g'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \Rightarrow g$ es monótona creciente.

$g(x) = 0 = x^5 + x + 1$ como $g(-1) = -1 < 0$ y $g(0) = 1 > 0$

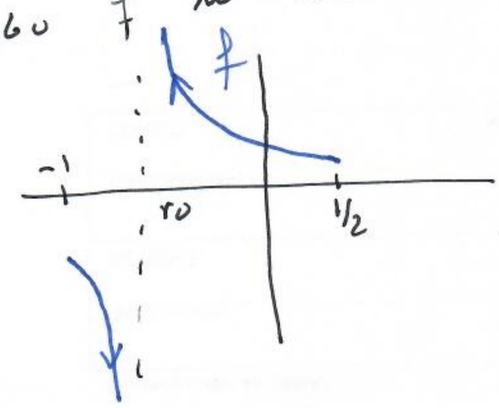
existe un $r_0 \in (-1, 0)$ con $g(r_0) = 0$



Luego $\lim_{x \to r_0^-} f(x) = \lim_{x \to r_0^-} \dfrac{1}{x^5 + x + 1} = -\infty$

$\lim_{x \to r_0^+} f(x) = \lim_{x \to r_0^+} \dfrac{1}{x^5 + x + 1} = \infty$

Luego f no alcanza ni máximo ni mínimo



Por monotonía
si $x > r_0$ f decrece.
si $x < r_0$ f decrece

No puede tener extremos relativos.

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 19:] $f(x) = \begin{cases} 2x^4 + x^4 \operatorname{sen}^2(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$f(x) \geq 0$ y $f(0) = 0$, luego f tiene un mínimo absoluto en $x = 0$, por tanto es un mínimo relativo.

Por otro lado $f'(x) = 8x^3 + 4x^3 \operatorname{sen}^2(1/x) +$

$$+ x^4\, 2 \operatorname{sen}(1/x) \cos(1/x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x^2 \left(4x + 2x \operatorname{sen}^2(1/x) - \operatorname{sen}(1/x)\cos(1/x)\right)$$

$$= \underset{\substack{\text{VI} \\ 0}}{2x^2} \left(\underbrace{2x\,(2 + \operatorname{sen}^2(1/x))}_{\text{pequeño cuando } x \simeq 0} - \underset{\substack{\| \\ \pm\frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}(1/x)\cos(1/x)} \right) \qquad x = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{4}} \quad k \in \mathbb{N}$$

Luego el signo de la derivada oscila cuando x se acerca a cero.

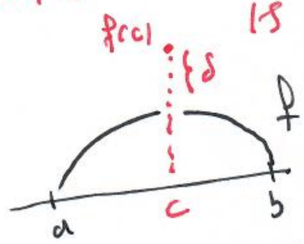
PROBLEMA 20:] $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ si f.

es un mínimo local si $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$ y no

$f(x) = -x^3$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, f decreciente.

a) b) $\{ 0 \in (-1,1)$ es mínimo local,

$|f(c) - f(r)| > \delta$ y c no es mínimo



c) $f(r) > \delta + f(c) > f(c)$

$\delta > 0$

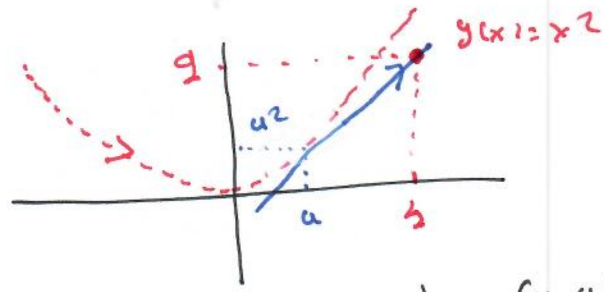
d) $f(r) - \delta > f(c) \Rightarrow$

$\forall r \in (a,b) \setminus \{c\}$.

Luego $x = c$ es un mínimo de f.

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 21:



$g'(x) = 2x$

La recta tangente por el punto (a, a^2) será

$$r(x) = 2a(x-a) + a^2$$

Queremos que esta recta pase por el punto $(4, 9)$, luego

$$\boxed{9 = r(4) = 2a(4-a) + a^2 = a(8-2a+a) = a(8-a)}$$

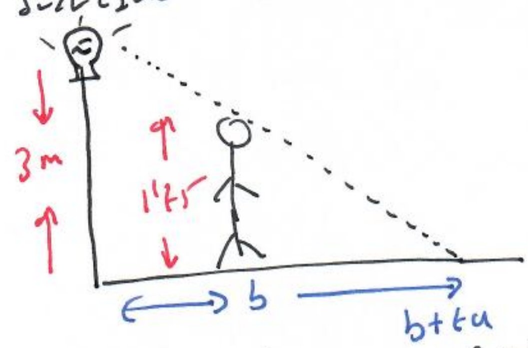
La ecuación $9 = 8a - a^2 \iff a^2 - 8a + 9 = 0$ tiene por solución $a = \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$

OBSERVAMOS QUE:

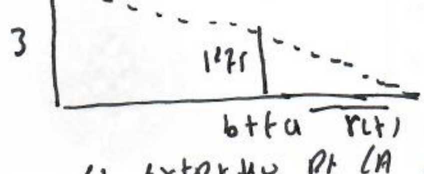
$$4-\sqrt{7} \quad 4 \quad 4+\sqrt{7}$$

Luego la solución será $(4-\sqrt{7}, (4-\sqrt{7})^2)$

PROBLEMA 22:



El peatón va a una velocidad constante $v \equiv a$. Luego si $t=0$, dista b de la farola. Luego en el tiempo t estará a distancia $b+ta$ de la farola.



En el tiempo t el extremo de la sombra se hallará en $\frac{1'75}{3} = \frac{r(t)}{b+ta+r(t)}$

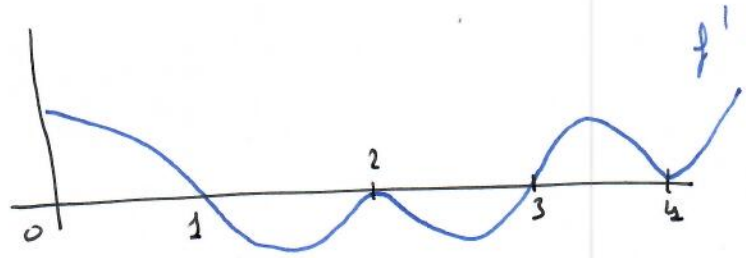
Despejando $r(t) = \frac{1'75}{1'25}(b+ta)$

El extremo de la sombra es $(b+ta) + \frac{1'75}{1'25}(b+ta) = \left(1 + \frac{1'75}{1'25}\right)(b+ta)$

Al pedir la velocidad, derivando nos queda $a\left(1 + \frac{1'75}{1'25}\right)$.

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

PROBLEMA 23:



LA FUNCIÓN CRECE EN [0,1] — 1 MÁXIMO RELATIVO

DECRECE EN [1,3] — 3 MÍNIMO RELATIVO

CRECE SI $x > 3$

PROBLEMA 24:

a) → III) LA FUNCIÓN SIEMPRE DECRECIENTE, $f' \leq 0$

b) → I) LA FUNCIÓN TIENE UNA MESETA $\Rightarrow f' = 0$ EN UN INTERVALO

c) → V) LA FUNCIÓN CRECE ($f' > 0$) DECRECE ($f' < 0$) Y VUELVE A CRECER ($f' > 0$)

d) → II) f NO ES CONTINUA EN CERO; NO EXISTE $f'(0)$.

e) → IV) LA FUNCIÓN DECRECE EN $(-\infty, 0)$ Y CRECE EN $(0, \infty)$, LUEGO $f' < 0$ EN $(-\infty, 0)$ Y $f' > 0$ EN $(0, \infty)$