DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL II

PROBLEMA 1: $g(x) = \dfrac{f(x)}{\cos x}$

f es derivable en $x = \pi$, $\cos \pi \neq 0$ y $\exists \cos' \pi$. Luego se aplica la regla de derivación de un cociente

$$\boxed{g'(\pi)} = \frac{f'(\pi)\cos\pi - f(\pi)(-\operatorname{sen}\pi)}{\cos^2\pi} = \boxed{-3}$$

PROBLEMA 2:

$$V: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \longrightarrow V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(volumen de la gota)}$$

El volumen decrece a un ritmo $\dfrac{dV}{dt} = -k\,4\pi r^2$ (área de la esfera $4\pi r^2$)

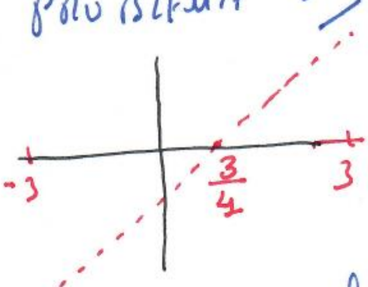
Ahora si r lo hacemos depender del tiempo $r(t)$, y así

$$\frac{d\,V(t)}{dt} = V'(r(t))\,r'(t) = -k\,4\pi r^2$$
regla de la cadena

Por otro lado

$$4\cancel{\pi} r^2(t)\, r'(t) = -k\,4\cancel{\pi} r^2(t) \Rightarrow \underline{r'(t) = -k}$$

PROBLEMA 3:



$\xrightarrow{\quad}$ $|4x-3|$

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 - x^2 & \text{si } x \in [3/4, 3] \\ 3 - 4x - x^2 & \text{si } x \in [-3, \frac{3}{4}) \end{cases}$$

Función continua y derivable salvo en $x = 3/4$.

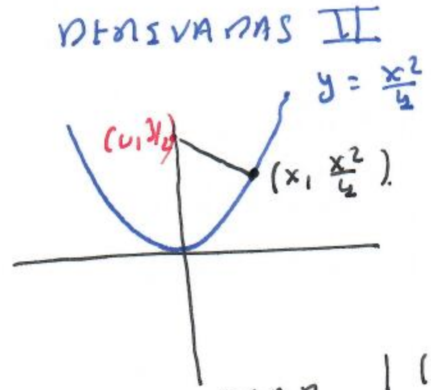
$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x \in (3/4, 3) \\ -2x - 4 & \text{si } x \in (-3, 3/4) \end{cases} \qquad \begin{matrix} f'(2) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{matrix}$$

Así
$f(-3) = 6$
$f(-2) = 7$ máximo
$f(3/4) = -9/16$
$f(2) = -1$ mínimo
$f(3) = 0$

Además $f(0) = 3$ y $f(2/3) = -1/9 \Rightarrow \exists x_0 \in [0, 2/3]$ con $f(x_0) = 0$

DERIVADAS II

PROBLEMA 4:



tenemos que minimizar $\left| (0, 3/2) - (x, \frac{x^2}{4}) \right| =$

$$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{4}\right)^2}$$

o equivalentemente minimizar

$$f(x) = x^2 + \left(3/2 - \frac{x^2}{4}\right)^2 \quad \text{con } x \geq 0.$$

$$f'(x) = 2x + \cancel{2}\left(3/2 - \frac{x^2}{4}\right)\left(-\frac{x}{\cancel{2}}\right) =$$

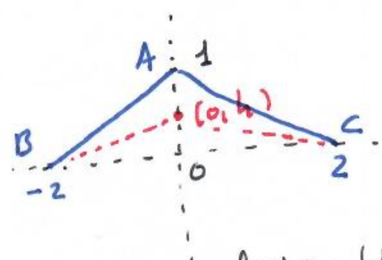
$$= x\left(2 - 3/2 + \frac{x^2}{4}\right)$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ ó bien $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} = 0$

Luego sólo ocurre para $x = 0$. Parece claro como $f(x) \geq 0$ y $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$, que f tiene un mínimo en $x = 0$, el punto buscado es el $(0, 0)$.

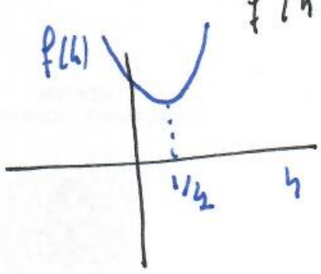
(Observemos que f es una función par.)

PROBLEMA 5:



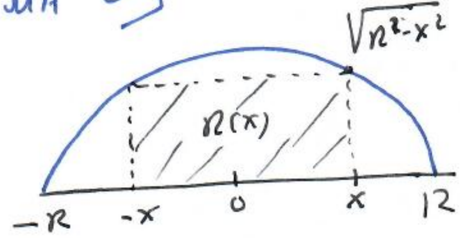
tenemos que minimizar $f(h) = (1-h) + 2(h^2 + 4) =$
$= 2h^2 - h + 9$

$f'(h) = 4h - 1 \qquad f'(h) = 0 \iff 4h - 1 = 0 \iff h = \frac{1}{4}$



DERIVADAS II

PROBLEMA 6:



$R(x) = 2x\sqrt{R^2-x^2} \quad x \in [-R,R]$

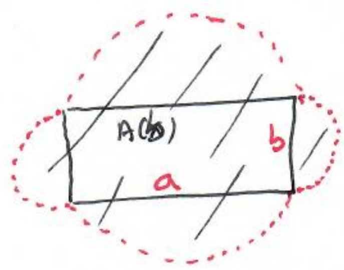
$R'(x) = 2\sqrt{R^2-x^2} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{R^2-x^2}}(-2x)$

$= \frac{2}{\sqrt{R^2-x^2}}\left[R^2-x^2-x^2\right]$

$R'(x) = 0 \iff R^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$

Como $R(x) \geq 0$, $R(0) = R(-R) = 0$, parece claro que para $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ tenemos un máximo

PROBLEMA 7:



$2a + 2b = 4$

$\Rightarrow a = 2 - b$

con $b \in [0,2]$

Así $A(b) = a \times b + 2\left(\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{1}{2}\right) + 2\left(\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2\frac{1}{2}\right)$

$= (2-b)(b) + \frac{\pi}{4}(2-b)^2 + \frac{\pi}{4}b^2$

$= -b^2 + 2b + \frac{\pi}{4}(4 - 4b + b^2 + b^2)$

$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)b^2 + (2-\pi)b + \pi$

$A'(b) = 2b\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + (2-\pi) \qquad A'(b) = 0 \iff$

$2b\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + (2-\pi) = 0 \iff b = \frac{\pi - 2}{2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)} = 1$

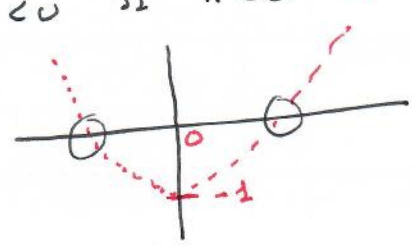
El máximo se encuentra cuando el rectángulo base es un cuadrado

PROBLEMA 8:

$f(x) = x^2 - x\,\mathrm{sen}\,x - \cos x$

Derivando $f'(x) = 2x - \cancel{\mathrm{sen}\,x} - x\cos x + \cancel{\mathrm{sen}\,x} = x(2 - \cos x)$

Así $f'(x) \begin{cases} >0 & \text{si } x>0 \Rightarrow f \text{ crece} \\ =0 & \text{si } x=0 \\ <0 & \text{si } x<0 \Rightarrow f \text{ decrece} \end{cases}$



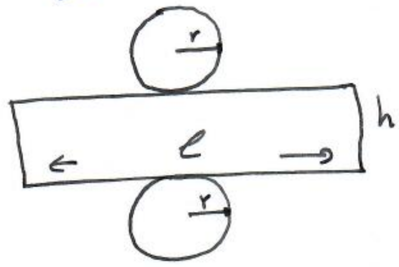
$f(0) = -1$, luego

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

y f es par

DERIVADAS II

PROBLEMA 9:



$\ell = 2\pi r$

VOLUMEN $= h \times r^2 \pi = 1$

ASÍ $h = \dfrac{1}{r^2 \pi}$

QUEREMOS MINIMIZAR EL "ÁREA" DE LOS MATERIALES

$$f(r) = \underbrace{\ell \times h}_{\text{ÁREA DEL LATERAL}} + \underbrace{2\pi r^2}_{\text{ÁREA DE LA BASE POR 2}} = 2\pi r \frac{1}{r^2 \pi} + 2\pi r^2 =$$

$$= \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

$$f'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = 0 \iff \frac{2}{r^2} = 4\pi r \iff \frac{1}{2\pi} = r^3$$

LUEGO PARA $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ TENEMOS UN MÍNIMO

(OBSERVEMOS QUE $\lim_{r \to 0^+} f(r) = \infty$ Y $\lim_{r \to \infty} f(r) = \infty$

LUEGO EN $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ TENEMOS UN MÍNIMO)

PROBLEMA 10:

$x + y = a.$ SUMA FIJA

a) $f(x) = x\underset{y = a - x}{y} = x(a-x) = ax - x^2$

$$f'(x) = a - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \quad . \text{ MÁXIMO.}$$

(YA QUE $\lim_{x \to \pm\infty} ax - x^2 = -\infty$

f NO TIENE MÍNIMO

c) $f(x) = x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$

$$f'(x) = 4x - 2a = 0 \Rightarrow x = \frac{2a}{4} \quad \text{MÍNIMO}$$

YA QUE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} 2x^2 - 2ax + a^2 = \infty.$

DERIVADAS II

PROBLEMA 11:) f' continua en $[0,\infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$

Así f' está acotada; claro si $M=1$

$\exists\, N>0$ tal que $\forall\, x>N \Rightarrow |f'(x)|<1$

Por otro lado $f'|_{[0,N]}$ está acotada por ser f' continua. Sea $K>0$ una cota de f'

$$|f'(x)|<K \quad \forall\, x\in[0,\infty)$$

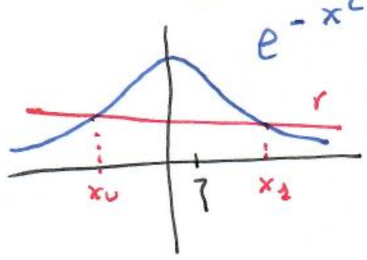
Sea $\varepsilon>0$ y $\delta<\frac{\varepsilon}{K}$, así $\forall\, x,y\in[0,\infty)$ con $|x-y|<\delta$, por el teorema del valor medio

$$f(x)-f(y) = f'(\xi)(x-y)$$

Luego $|f(x)-f(y)| \le |f'(\xi)|\,|x-y| \le K\delta = \varepsilon$.

Lo que prueba que f es uniformemente continua en $[0,\infty)$.

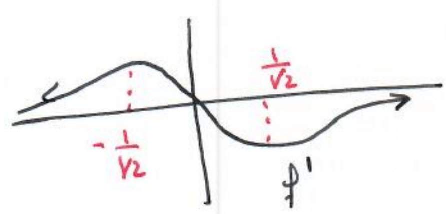
PROBLEMA 12:)



(T. valor medio)

$$\underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{\text{pendiente de la recta}} = f'(\xi) =$$

$$= -2\xi e^{-\xi^2}$$



$\lim_{x\to-\infty} -2\xi e^{-\xi^2} = 0^+$

$\lim_{x\to\infty} -2\xi e^{-\xi^2} = 0^-$

$f'(0)=0$

$$f''(\xi) = -2e^{-\xi^2} + 4\xi^2 e^{-\xi^2} = (-2+4\xi^2)e^{-\xi^2}$$

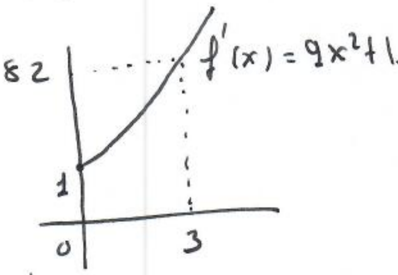
$$f''(\xi)=0 \Leftrightarrow -2+4\xi^2=0 \Rightarrow \xi=\pm\frac{1}{\sqrt2}$$

$$\left|f'\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}\right)\right| = 2\frac{1}{\sqrt2}e^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{2e}} < 1.$$

La pendiente de la recta r es siempre menor que 1.

DERIVADAS II

PROBLEMA 13:) $f(x) = 3x^3 + x + 1 \quad x \in [0,3]$



$$f'(x) = 9x^2 + 1 \quad x \in [0,3]$$

$$1 \le f'(x) \le 82 \quad \forall x \in [0,3]$$

RECTAS TANGENTES A f EN $(x_0, f(x_0))$

$$r(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

LAS PENDIENTES $f'(x_0) \in [1, 82]$.

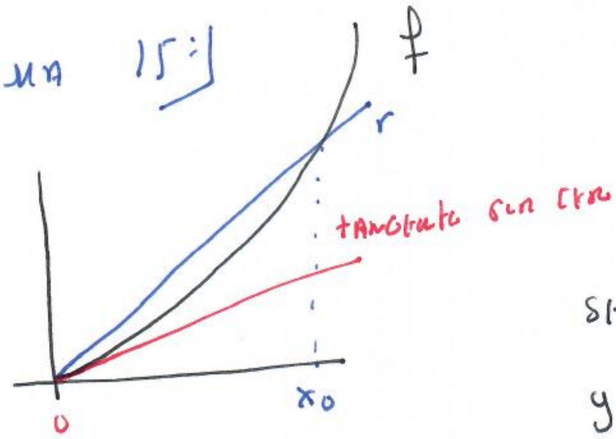
PROBLEMA 14:) $\frac{1}{5} < \frac{1}{M} \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le M$

$$\Big\downarrow y \to x$$

$$\frac{1}{5} < f'(x) \le M$$

ASÍ $\frac{1}{5} < f'(c) \le M$, $f'(c)$ PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE. LUEGO $f'(c) \neq \frac{-M}{3}$..

PROBLEMA 15:)



$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0} = \frac{f(x_0)}{x_0}$ PENDIENTE DE LA RECTA r.

SEA $y(x) = \frac{f(x)}{x}$

y CONTINUA EN $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 7$$

ADEMAS y ES CONTINUA EN $x>0$.

y $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \infty$

ASÍ $\exists\, x_0 \in [0,\infty)$ TAL QUE $\frac{y(x_0)}{x_0} = 36$

(POR EL TEOREMA DE BOLZANO).

DERIVADAS II

PROBLEMA 16:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 0$$

$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} 1/x = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Por otro lado

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen}(1/x) - x^2 (\cos 1/x) \frac{1}{x^2}}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen}(1/x)}{\cos x} - \frac{\cos 1/x}{\cos x}$$ ¡No existe!

El límite $\lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen}(1/x)}{\cos x} = 0$

No existe el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 1/x}{\cos x}$ no existe

$\cos (2k\pi + \pi/2) = 0$ y $\cos \frac{1}{2k\pi+\pi/2} \simeq 1$

(para $x_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}$ $\quad \cos 2k\pi = 1$ y $\cos \frac{1}{2k\pi} \simeq 1$)

para $y_k = \frac{1}{2k\pi}$

PROBLEMA 17:

a) $f(x+1) - f(x) \overset{\text{Th valor medio}}{=} f'(\eta)(x+1-x) = f'(\eta)$

$\eta \in (x, x+1)$

Tomando límites $\lim_{x\to\infty} f(x+1) - f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(\eta) =$

$$= \lim_{x\to\infty} f'(\eta) = A$$

$\eta > x$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(\eta)(2x-x)}{x} = A.$$

c) Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

Aplicando a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = 0.$

DERIVADAS II

PROBLEMA 18: Sea $f(x) = \ln(e^x+1)$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln(e^{x+h}+1) - \ln(e^x+1) \overset{\text{TP valor medio}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^\xi}{e^\xi+1}(x+h-x) = \lim_{\xi\to\infty} \frac{e^\xi}{e^\xi+1} h = h.$$

$\xi \in (x, x+h)$

PROBLEMA 19: Sea $h = f - g$

Así $h(a) = f(a) - g(a) = 0$

y $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b]$

Luego h es decreciente estrictamente

Luego $\forall x \in [a,b]$

$$h(x) \le h(a) = 0$$

Así $f(x) - g(x) \le 0 \Rightarrow f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

PROBLEMA 20: Suponemos que $f(t)$ recoge el movimiento del coche (para el tiempo t el coche está en el kilómetro $f(t)$) suponemos que el coche no se detuvo (f continua) y que conduce con suavidad (existe f').

Así en 3 minutos recorre 4100 m

es decir en $\frac{3}{60}$ h recorre 4,1 km.

$$\frac{f(13^h28') - f(13^h25')}{13^h28' - 13^h25'} = \frac{4{,}1 \text{ km}}{\frac{3}{60} \text{ h}} =$$

$$= 82 \text{ km/h} \overset{\text{TP valor medio}}{=} f'(\xi) \quad \text{con } \xi \in (13^h25', 13^h28')$$

En algún momento al menos estuvo a $82 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

DERIVADAS II

PROBLEMAS 21:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{sen^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x - x^2}{x^2\, sen^2 x} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=}$

SIEMPRE QUE APLICAMOS LA DE L'HOPITAL NOS ASEGURAMOS QUE SE VERIFICAN LAS HIPÓTESIS PREVIAMENTE!

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\, sen x \cos x - 2x}{2x\, sen^2 x + x^2\, 2\, sen x \cos x} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2 x - 2 sen^2 x - 2}{2 sen^2 x + 4x\, sen x \cos x + 4x\, sen x \cos x + 2x^2[\cos^2 x - sen^2 x]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{2 sen^2 x + 4x\, sen 2x + 2x^2 \cos 2x} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\, sen\, 2x}{4\, sen x \cos x + 4\, sen 2x + 8x \cos 2x + 4x \cos 2x - 4x^2 sen 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\, sen\, 2x}{6\, sen\, 2x - 4x^2 sen 2x + 12x \cos 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\, sen\, 2x}{2\, sen 2x\,[3 - 2x^2] + 12x \cos 2x} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos 2x}{4\cos 2x\,[3-2x^2] + 2 sen 2x\,[-4x] + 12\cos 2x - 24x\, sen 2x} =$$

$$= \frac{-8}{12+12} = \frac{-8}{24} = -1/3$$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - \sqrt{x}} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{x}}{x(2\sqrt{x} - 1)} =$

$= 2$

DERIVADAS II

PROBLEMA 22:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x+2}{x^2-3x+2} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

ESTE LÍMITE NO ES UNA INDETERMINACIÓN

PROBLEMA 23:

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,\mathrm{sen}\, 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Con $g(0) = g'(0) = 0$

$$f'(0) \underset{\text{definición}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)\,\mathrm{sen}(1/h)}{h}.$$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$$

y como $\left| \frac{g(h)\,\mathrm{sen}(1/h)}{h} \right| \leq \frac{g(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

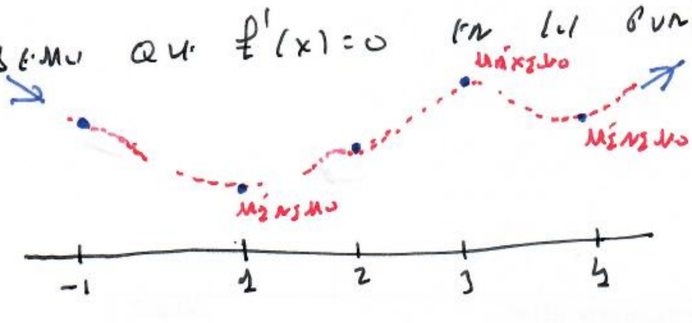
Sí se sigue que $f'(0) = 0$.

PROBLEMA 24:

Supongamos que n es par

Entonces $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \infty$ así

Sabemos que $f'(x)=0$ en los puntos $-1, 1, 2, 3, 4$



Los máximos y mínimos relativos de f deben estar sobre los puntos singulares

En $x=1$ y $x=2$ tenemos $f'(x)=0$, pero en este caso no tenemos extremos relativos

DERIVADAS II

PROBLEMA 25:] a) SEA $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$

$Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$

¿DÓNDE SE CORTAN? EN LOS CEROS DE

$$P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff$$

$$a_m x^m + \quad + a_0 - b_0 - b_1 x_1 - \quad - b_n x^n = 0$$

ESTA ES UNA ECUACIÓN POLINÓMICA DE GRADO MENOR O IGUAL A $\max\{m,n\}$. ASÍ POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA A LO MÁS TIENE $\max\{m,n\}$ RAÍCES

(¡CLARO! SI x_0 ES RAÍZ $(x-x_0) \mid P-Q$ ES DECIR

$P-Q(x) = R(x)(x-x_0)$ CON $R(x)$ DE GRADO UNA UNIDAD MENOS QUE $P-Q$. LUEGO POR UN PROCESO DE INDUCCIÓN, SI $R(x)$ TIENE A LO MÁS $\max\{m,n\}-1$ RAÍCES, LLEGAMOS A QUE $P-Q$ TIENE A LO MÁS $\max\{m,n\}$ RAÍCES. OBSERVEMOS QUE TODA RAÍZ DE R LO ES DE $P-Q$).

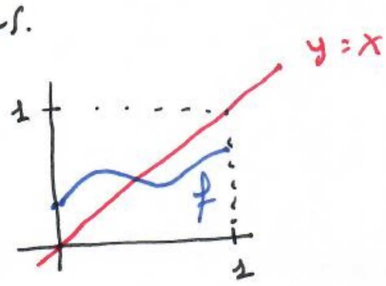
b) SUPONGAMOS QUE $m = n$ Y SEA $x_1, x_2 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ NO NULOS EN TODOS DISTINTOS; SEA $a \neq b$

$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdot \quad (x-x_n)$

$Q(x) = b(x-x_1)(x-x_2) \cdot\cdot \quad (x-x_n)$

SE CORTAN EN $(x_1,0)$ $(x_2,0)\cdots$ $(x_n,0)$ Y SOLO EN ESOS PUNTOS.

PROBLEMA 26:]



SEA $g(x) = f(x) - x$

$g'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$

$\forall x \in [0,1]$ (POR HIPÓTESIS)

ASÍ g ES ESTRICTAMENTE MONÓTONA, POR SER INYECTIVA ($g' \neq 0$ Y EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO) Y CONTINUA.

AHORA SI $g(0) = 0 \Rightarrow g(x) > 0$ ó $g(x) < 0$ $\forall x$. $f(0) = 0$.

SI $g(1) = 0 \Rightarrow g(x) > 0$ ó $g(x) < 0$ $\forall x$ $f(1) = 1$

SI $g(0) > 0$ Y $g(1) < 0$ POR BOLZANO $\exists x_0 \in (0,1)$ $f(x_0) = x_0$

ÚNICO POR LA MONOTONÍA DE g

DERIVADAS II

PROBLEMA 27:] SEA $y(x) = \sqrt{x}$

POR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

$$y(66) - y(64) = y'(\xi)(66-64) \quad \text{con } \xi \in [64, 66]$$

ASÍ $\quad \sqrt{66} - \sqrt{64} = \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{\xi}}\cancel{2} \quad \Rightarrow \quad 8 < \sqrt{\xi} < \sqrt{66}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{81}} < \frac{1}{\sqrt{66}} < \frac{1}{\sqrt{\xi}} < \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - \sqrt{64} < \frac{1}{8}.$$

PROBLEMA 28:] COMO $\exists f''$, f y f' son continuas

y $\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x-h) - 2f(x) = 0$

y $\lim_{h\to 0} h^2 = 0$

PODEMOS APLICAR L'HÔPITAL (x ES FIJA Y DERIVAMOS EN h)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} =$$

$$\underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} \underset{f'' \text{ continua}}{=} \frac{\cancel{2}f''(x)}{\cancel{2}}.$$