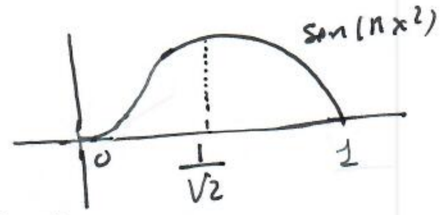
DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL III

PROBLEMA 1: $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2)$, $x \in [0,1]$

Si $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1$, luego $0 \le \pi x^2 \le \pi$.

Así tenemos que:



$\boxed{\text{Luego } \operatorname{sen}(\pi x^2) \ge 0}$ $\forall x \in [0,1]$

y además como $f'(x) = 2\pi x \cos \pi x^2$; $f'(0) = 0$ y $f'(1) = -2\pi$

y $f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$; luego f' no es creciente ni decreciente, luego f no puede ser cóncava en todo $[0,1]$.

PROBLEMA 2: Vamos a calcular $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, el otro límite lateral se calcula de forma análoga.

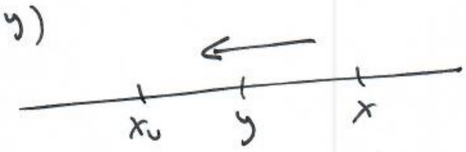
Sea $x \in (x_0, b)$; f y g son derivables en (x_0, b) y continuas en $[x_0, b]$ (basta con definir $f(x_0) = g(x_0) = 0$) ya que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$.

Como $g(x_0) = 0$, entonces $g(y) \neq 0$ $\forall y \in (x_0, x)$ (por el teorema de Rolle, $g'(y) \neq 0$ para todo y).

El teorema de valor medio de Cauchy.

Así por el teorema de valor medio de Cauchy para cierto $y \in (x_0, x)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \overset{(*)}{=} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$



Observemos que si $x \to x_0^+$, entonces $y \to x_0^+$.

Por tanto $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{y \to x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \infty.$

(*) El T. de valor medio de Cauchy nos dice que $f(x) g'(y) = g(x) f'(y)$, y por tanto como sabemos por hipótesis que $g'(y) \neq 0$, y por el teorema de Rolle $g(x) \neq 0$, se puede despejar

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL III

PROBLEMA 3: OBSERVEMOS QUE SON EQUIVALENTES

(*) a) EXISTE $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

b) EXISTE $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})}$ (MISMO DE CARÁCTER DE LÍMITE)

COMO $h_1(x) = f(\frac{1}{x})$ ES CONTINUA EN $[0,\infty)$ Y h_1 DERIVABLE

$\lim_{x\to 0^+} h_1(x) = \lim_{y\to\infty} f(y) = 0$,

EN $(0,\infty)$

LO MISMO PASA CON $h_2(x) = g(\frac{1}{x}) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

ADEMÁS $h_2'(x) = g'(\frac{1}{x})\cdot\frac{-1}{x^2} \neq 0 \ \forall x$.

AHORA POR LA REGLA DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{x})\cancel{\frac{-1}{x^2}}}{g'(\frac{1}{x})\cancel{\frac{-1}{x^2}}} = (*)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

(EXISTE POR HIPÓTESIS)

PROBLEMA 4: VAMOS A CALCULAR $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}$.

CON EL OTRO LÍMITE LATERAL SE PROCEDE DE FORMA ANÁLOGA.

EN PRIMER LUGAR EXISTE $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

LUEGO $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (x_0, x_0+r)$ PARA CIERTO $r>0$.

COMO $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = \infty$, PODEMOS CONSIDERAR $g' \geq 0$

AHORA SUPONGAMOS QUE $\ell \in \mathbb{R}$ (SI $\ell = \infty$, SE HACE CON ALGUNA VARIACIÓN).

POR CIERTO EXISTE $M > 1$ TAL QUE $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| < M \ \forall x \in (x_0, x_0+r)$

DADO $\varepsilon > 0$ PARA $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$ EXISTE UN $\delta > 0$ TAL QUE SI $x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon'/2 < \varepsilon/2$

y $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|\varepsilon' < \varepsilon/2$

DERIVADAS III

PROBLEMA 4:) CONTINUACIÓN

$x_0 \quad x_1 \quad \delta_1 \quad x_2 \quad x_0+\delta$

FIJAMOS UN $x_2 \in (x_0, x_0+\delta)$

AHORA COMO $\displaystyle\lim_{x_1\to x_0^+} \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)} = \lim_{x_1\to x_0^+} \frac{1}{1-\frac{f(x_2)}{f(x_1)}} = 1$

Y $\displaystyle\lim_{x_1\to x_0^+} \frac{g(x_1)-g(x_2)}{g(x_1)} = \lim_{x_1\to x_0^+} \frac{1-\frac{g(x_2)}{g(x_1)}}{1} = 1$

SE SIGUE QUE $\displaystyle\lim_{x_1\to x_0^+} \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)} \cdot \frac{g(x_1)-g(x_2)}{g(x_1)} = 1$

LUEGO EXISTE $\delta_1 < \delta$ TAL QUE $\forall x_1 \in (x_0, x_0+\delta_1)$

ENTONCES $\displaystyle 1-\varepsilon \le \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)} \cdot \frac{g(x_1)-g(x_2)}{g(x_1)} < 1+\varepsilon$

ASÍ $\displaystyle \frac{f(x_1)}{g(x_2)} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} \cdot \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)} \cdot \frac{g(x_1)-g(x_1)}{g(x_1)} =$

$$= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \left[\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)} \cdot \frac{g(x_1)-g(x_2)}{g(x_1)}\right]$$

(T. VALOR MEDIO DE CAUCHY)

$\xi \in (x_1, x_2) \subset (x_0, x_0+\delta)$

LUEGO DADO ε SI $x_1 \in (x_0, x_0+\delta_1)$

$$\left|\frac{f(x_1)}{g(x_2)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left[\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)} \cdot \frac{g(x_1)-g(x_2)}{g(x_1)}\right] - \ell\right| =$$

$$\le \max\left\{\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(1+\varepsilon)-\ell\right|, \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(1-\varepsilon)-\ell\right|\right\} \le$$

$$\le \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell\right| + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\varepsilon\right| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

LUEGO $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ c.q.d.

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL III

PROBLEMA 5º) $f''(x) = P''(x) \geq 0 \quad (*)$

$$P(x) = a_{k_1} x^{2k_1} + a_{k_2} x^{2k_2} + \dots + a_2 x^2 + a_0 \qquad a_0 \dots a_{k_1} \geq 0$$

$$P''(x) = 2k_1(2k_1-1)a_{k_1} x^{2k_1-2} + \dots + 2a_2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ya que $x^{2k_j-2} \geq 0$ y los coeficientes son positivos.

Por tanto, como $f''(x) \geq 0 \ \forall x$, se sigue que f es convexa.

PROBLEMA 6º) Por el teorema de valor medio

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi) \leq f'(x) \quad (\bullet)$$

$\xi \in (0,x)$ $\qquad$ f' creciente

Así si derivamos g

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right) \geq 0$$

$x>0$ y $(\bullet)$.

Luego g es creciente.

PROBLEMA 7º) a) $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 3$

$f'(x) = 12x^3 - 21x^2 = x^2(12x-21)$; para que la gráfica de f tenga 5 puntos con tangentes paralelas al eje de las "x" ($y=0$) se necesita que $f'(x)=0$ se anule en 5 puntos. Lo cual no es el caso.

b) $f(x) = 3x^2+x+1$ $\quad f'(x) = 6x+1$ $\quad f'(x)=0 \iff x=-1/6$ la gráfica de f solo en $(-1/6, f(-1/6))$ la es paralela a $y=0$

c) $f'(x) = 9x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d) $f'(x) = 2x\,\mathrm{sen}\,x + x^2\cos x = x(2\,\mathrm{sen}\,x + x\cos x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Luego no hay tangentes paralelas al eje $x=0$

(¡de pendiente infinita!)

DERIVADAS III

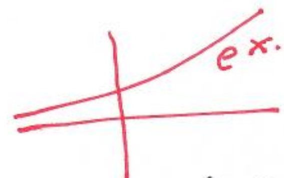
PROBLEMA 8: a) $x+1 \leq e^x$ PARA TODO $x \in \mathbb{R}$.

SEA $g(x) = e^x - x - 1$; $g(0) = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x - x - 1 = \infty$$

y $$\lim_{x \to \infty} e^x - x - 1 = \infty$$

ADEMÁS $g'(x) = e^x - 1 = 0$ $\begin{cases} <0 & \text{SI } x<0 \\ =0 & \text{SI } x=0 \\ >0 & \text{SI } x>1 \end{cases}$



LUEGO g DECRECE EN $(-\infty, 0)$, ASÍ $g(x) \geq g(0)$ $\forall x<0$

y CRECE EN $(0, \infty)$ ASÍ $g(0) \leq g(x)$ $\forall x>0$

EN CUALQUIER CASO $g(x) \geq g(0) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

LUEGO $e^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x+1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) SEA $b>0$ y SEA $x \in (0, b)$

SEA $g(x) = \ln \frac{b}{x} + \frac{x}{b} - 1$, $g(b) = 0$ y

$g'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{b} \leq 0$, g DECRECIENTE, LUEGO $\ln\frac{b}{x} + \frac{x}{b} - 1 \geq 0$ $\forall x \in (0,b)$.

y ASÍ $\ln\frac{b}{x} \geq 1 - \frac{x}{b}$.

SEA $h(x) = \ln\frac{b}{x} - \frac{b}{x} + 1$ $h(b) = 0$ y

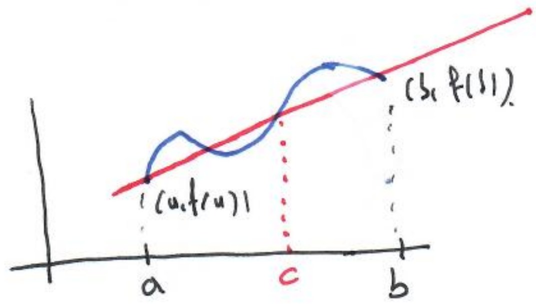
$h'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x}\left(-1 + \frac{b}{x}\right) > 0$, $0<x<b$ LUEGO

h ES CRECIENTE, ASÍ $h(x) < h(b) = 0$ $\forall x \in (0,b)$

LUEGO $\ln\frac{b}{x} < \frac{b}{x} + 1$

DERIVADAS III

PROBLEMA 9:



$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)+f(a)} = \underline{f(c)}$$

VALOR DE LA RECTA QUE VA A ESTAR EN c — VALOR DE f EN c.

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

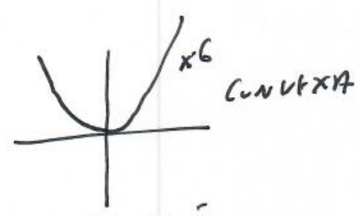
f'' es continua; si $f''\neq 0$, en función

$f''>0 \Rightarrow f$ CONVEXA $\underset{b>c>a}{\Rightarrow} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f''<0 \Rightarrow f$ CONCAVA $\underset{b>c>a}{\Rightarrow} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

LUEGO NECESARIAMENTE TIENE QUE EXISTIR $d\in(a,b)$ con $f''(d)=0$.

PROBLEMA 10: a) y c) $f(x)=x^6$



$f''(0)=f'''(0)=f^{(IV)}(0)=0$

en $x=0$ NO HAY UN PUNTO DE INFLEXIÓN

b) $f''(x)=0$ $\quad f'''(x)>0$ NOS DICE QUE f' TIENE UN MÍNIMO RELATIVO c; ASÍ f' DECRECE EN $(c-\delta, c)$ y f' CRECE EN $(c, c+\delta)$; ES DECIR $f''\leq 0$ EN $(c-\delta,c)$ y $f''\geq 0$ EN $(c, c-\delta)$; LUEGO f ES CONCAVA EN $(c-\delta,c)$ y CONVEXA EN $(c, c+\delta)$.

d) NO TIENE SENTIDO

DERIVADAS III

PROBLEMA 11º

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

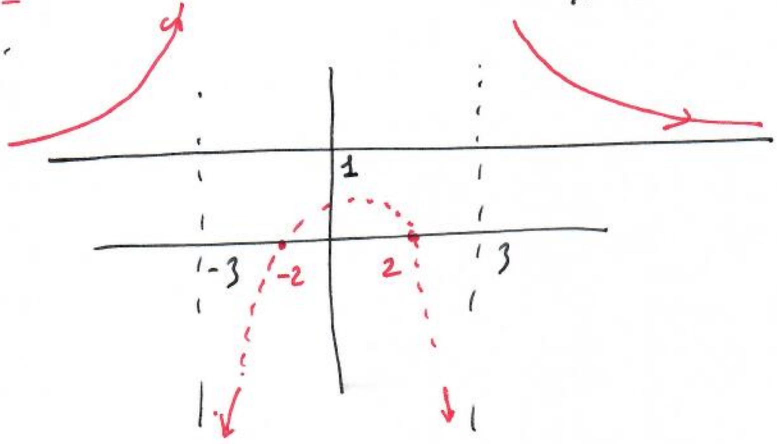
- Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$; aquí f es continua
- LÍMITES (en los extremos del dominio)

$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-9} = 1$; $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$

OBSERVA f ES PAR

ASÍ



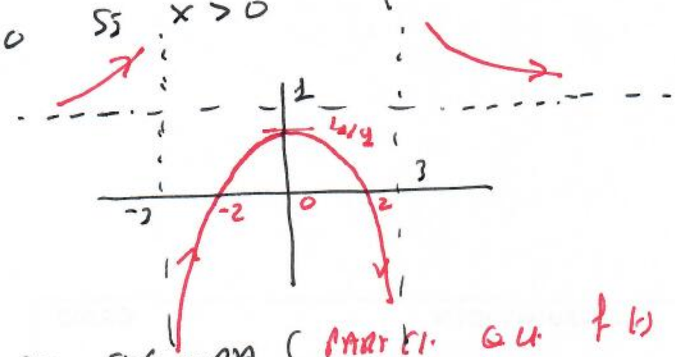
$f(x)=0 \iff x = \pm 2$

- DERIVADA $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-9)-(x^2-4)2x}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-10x}{(x^2-9)^2}$

$f'(x)=0 \iff x=0$
$f'(x)>0$ si $x<0$
$f'(x)<0$ si $x>0$

luego $x=0$ máximo relativo

- ASÍ



- DERIVADA SEGUNDA (PARA VER QUE f ES CÓNCAVA EN $(-3,3)$ Y CONVEXA EN $(-\infty,-3)$ Y $(3,\infty)$.

$$f''(x) = \frac{-10(x^2-9)^2-10x\cdot 2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4} = \frac{-10(x^2-9)+40x^2}{(x^2-9)^3} = \frac{30x^2+90}{(x^2-9)^3}$$

$f''(x)\neq 0$ para todo x. ; $f''(x)\begin{cases} <0 & \text{si } x\in(-3,3) \Rightarrow f \text{ cóncava} \\ >0 & \text{si } |x|>3 \Rightarrow f \text{ convexa.}\end{cases}$

DERIVADA III

PROBLEMA 11:] m) $f(x) = x\ln x^2 - x^2$

— Dom f = $\mathbb{R} - \{0\}$ ALLÍ f ES CONTINUA.

— LÍMITES - $\lim_{x\to-\infty} x\ln(x^2) - x^2 = -\infty$

- $\lim_{x\to\infty} x\ln(x^2) - x^2 = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{\ln x^2}{x} - 1\right) =$

COMO $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2}{x} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$

$= -\infty$

- $\lim_{x\to 0} x\ln x^2 - x^2$; $\lim_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=}$

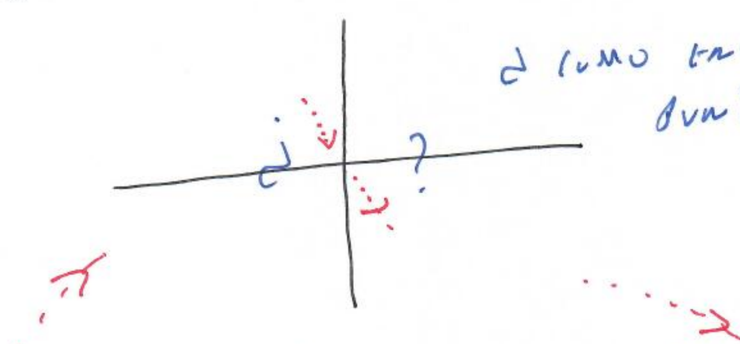
$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{\cancel{x^2}}}{-1/\cancel{x^2}} = 0$

LUEGO $\lim_{x\to 0} x\ln x^2 - x^2 = 0$

— SIGNO DE f

$f(x) = x(\ln x^2 - x)$ $\begin{cases} >0 & \text{SI } x<0 \\ <0 & \text{SI } x>0 \end{cases}$ YA QUE $\ln x^2 \to -\infty$ SI $x\to 0$

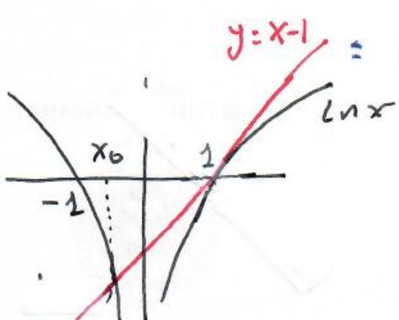
TENEMOS ALGO DE ESTO



¿CÓMO ENTRA f AL PUNTO $(0,0)$?

— DERIVADA $f'(x) = \ln x^2 + x\frac{2x}{x^2} - 2x =$

$= \ln x^2 - 2x + 2 = 2[\ln x + 1 - x]$ POR CONTINUIDAD DE f' EN $(-\infty, 0)$ Y $(0, \infty)$

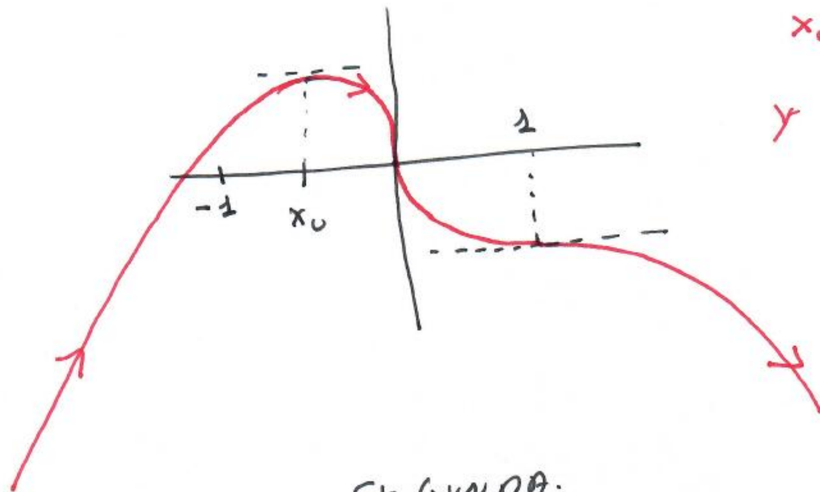


ASÍ $f'(x) = \begin{cases} >0 & \text{SI } x < x_0 \\ <0 & \text{SI } x\in(x_0, 0) \\ \leq 0 & \text{SI } x>0 \\ =0 & \text{CON SI } x=1 \end{cases}$

Y $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$

DERIVADAS III

PROBLEMA 11:) m) $f(x) = x \ln x^2 - x^2$ CONTINUACIÓN



x_0 máximo relativo y como se ve absoluto

– DERIVADA SEGUNDA.

$$f''(x) = 2\left[\frac{1}{x} - 1\right] \begin{cases} >0 & \text{si } x \in (0,1) \\ =0 & \text{si } x = 1 \\ <0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\underline{\underline{x > 0}}$

Así f es convexa en $(0,1)$
f es cóncava en $(1,\infty)$
f tiene un punto de inflexión en $x = 1$

$$f''(x) = 2\left[\frac{1}{x} - 1\right] < 0 \quad \text{si } x < 0$$

$\underline{\underline{x < 0}}$

Así f es cóncava en $(-\infty, 0)$.

PROBLEMA 11:) s) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{2x^2 - x - 1}$

– Dom f $\quad 2x - x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

Así Dom $f = \mathbb{R} - \{-1/2, 1\}$ allí f es continua.

– Límites $\quad f(x) = \dfrac{2 - 5/x + 4/x^2 + 1/x^3}{2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1/x^3} = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{2(x-1)(x+1/2)}$

Así

DERIVADAS III

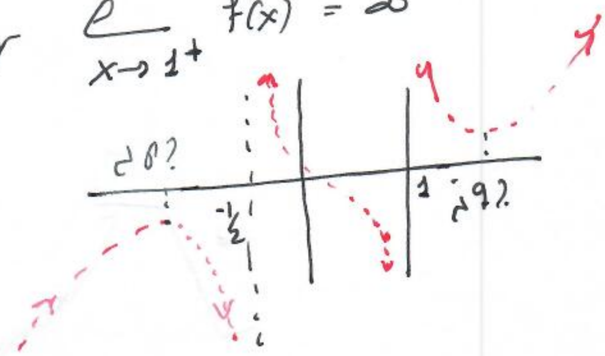
PROBLEMA 11: Si $f(x) = \dfrac{2x^3-5x^2+4x+1}{2x^2-x-1}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to -1/2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to -1/2^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$

Tenemos algo como



- Asíntotas oblicuas

$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

y $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3-5x^2+4x+1}{2x^2-x-1} - x =$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{2x^3}-5x^2+4x+1 \cancel{-2x^3}+x^2+x}{2x^2-x-1} = -2$

Luego $y(x) = x - 2$ es una asíntota oblicua

- Derivada $f'(x) = \dfrac{(6x^2-10x+4)(2x^2-x-1)-(2x^3-5x^2+4x+1)(4x-1)}{(2x^2-x-1)^2}$

$= \dfrac{(12x^4-26x^3+12x^2-6x-4)-(8x^4-22x^3+21x^2-1)}{(2x^2-x-1)^2} =$

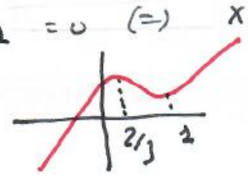
$= \dfrac{4x^4-4x^3-9x^2+6x-3}{(2x^2-x-1)^2} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \infty \\ \\ \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \end{array} \right.$

Parece complicado encontrar los ceros de f.

Observación: •) De los límites existe $x_1 \in (-1/2, 1)$ con $f(x_1) = 0$, parece que $x_1 \in (-1/2, 0)$ (como $f(0) = -1$)

••) $g(x) = 2x^3-5x^2+4x+1$; $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

$g'(x) = 6x^2-10x+4 = 0 \iff x = \dfrac{10\pm\sqrt{100-96}}{12} = \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow 8/12 = 2/3 \end{array}$



$g(1) = 2-5+4+1 = 2 > 0$

Luego g tiene una raíz, ¡f también!

DERIVADAS III

PROBLEMA 12: $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$

- $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$. La función es un cociente entre $|x|$ continua y $e^{|x-1|}$ que es composición de e^y y $|x-1|$ ambas continuas. Luego f es continua en todo su dominio.

- $|x|$ no es derivable en $x=0$
  $|x-1|$ no es derivable en $x=1$
  Así f es derivable en $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

$$- f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^{x-1}} & \text{si } x>1 \\ x & \text{si } x=1 \\ \dfrac{x}{e^{1-x}} & \text{si } x\in[0,1] \\ \dfrac{-x}{e^{1-x}} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-xe^{x-1}}{e^{2(x-1)}} = \dfrac{1-x}{e^{x-1}} & x>1 \\ \dfrac{e^{1-x}+xe^{1-x}}{e^{2(1-x)}} = \dfrac{1+x}{e^{1-x}} & x\in(0,1) \\ \dfrac{-e^{1-x}-xe^{1-x}}{e^{2(1-x)}} = \dfrac{-1-x}{e^{1-x}} & x<0 \end{cases}$$

Observemos que $f'(1^+)=0$ $f'(1^-)=2$ luego f
y que $f'(0^+)=1$ $f'(0^-)=-1$
no es derivable en $x=0$ ni en $x=1$.

$$f'(x) \begin{cases} <0 & \text{si } x>1 \Rightarrow \text{decreciente} \\ >0 & \text{si } x\in(0,1) \Rightarrow \text{creciente} \\ <0 & \text{si } x\in(-1,0) \Rightarrow \text{decreciente} \\ >0 & \text{si } x<-1 \Rightarrow \text{creciente} \end{cases}$$

$x=1$ máximo relativo

$x=0$ mínimo relativo

$f'(-1)=0$ máximo relativo

DERIVADAS III

PROBLEMA 12: CONTINUACIÓN

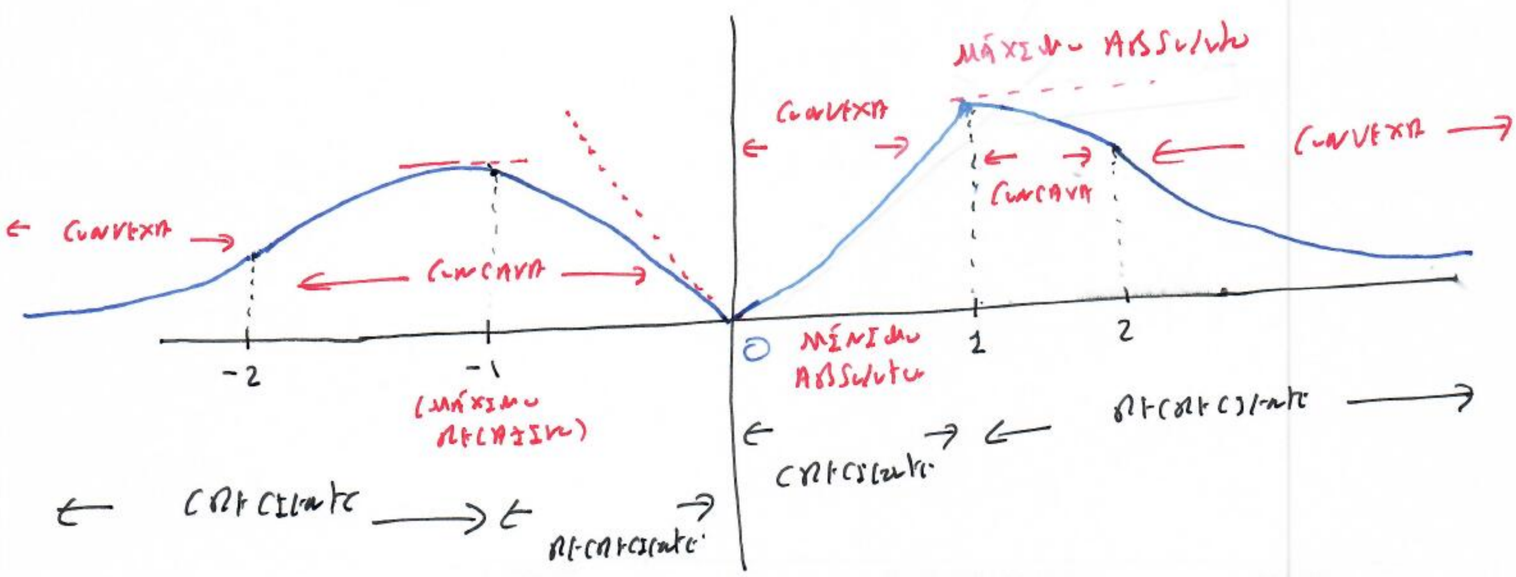
LÍMITES: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{e^{|x-1|}} = 0$

LUEGO LA RECTA $y = 0$ ES UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL

SIGNO DE $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}} \geq 0$ Y $f(x) = 0 \iff x = 0$

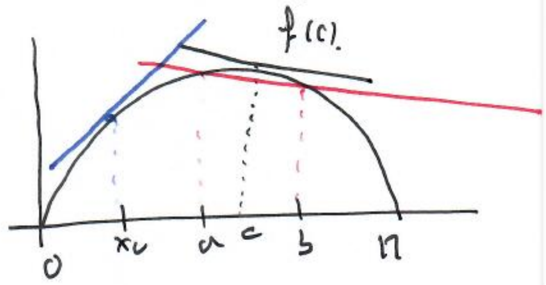
CONVEXIDAD:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-e^{x-1} + (x-1)e^{x-1}}{e^{2(x-1)}} = \frac{x-2}{e^{x-1}} & \begin{cases} > 0 \text{ SI } x > 2 \Rightarrow f \text{ CONVEXA} \\ < 0 \text{ SI } x \in (1,2) \Rightarrow f \text{ CÓNCAVA} \end{cases} \\ & x = 1 \text{ PUNTO DE INFLEXIÓN} \\ \frac{e^{1-x} + (1+x)e^{1-x}}{e^{2(1-x)}} = \frac{2+x}{e^{1-x}} & > 0 \text{ SI } x \in (0,1) \Rightarrow f \text{ CONVEXA} \\ & x = 0 \text{ PUNTO DE INFLEXIÓN} \\ \frac{-e^{1-x} - (1+x)e^{1-x}}{e^{2(1-x)}} = \frac{-2-x}{e^{1-x}} & \begin{cases} < 0 \text{ SI } x \in (-2,0) \Rightarrow f \text{ CÓNCAVA} \\ \quad x = -2 \text{ PUNTO DE INFLEXIÓN} \\ > 0 \text{ SI } x < -2 \Rightarrow f \text{ CONVEXA} \end{cases} \end{cases}$$



DERIVADAS III

PROBLEMA 13:



PENDIENTE: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$ y $f''(x) = -\operatorname{sen} x < 0$ $\forall x \in [0, \pi]$

Luego f es cóncava.

Por el teorema del valor medio existe $c \in (a, b)$

tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Pero si f cóncava $\Rightarrow$ f' es decreciente, así $f'(x_0) \geq f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

como $x_0 < c$ $\Rightarrow$

PROBLEMA 14: La función $f(x) = b\operatorname{sen} x + a\cos x$

verifica que $\left\{ \begin{array}{l} f + f'' = 0 \\ f(0) = a \ \text{ y } \ f'(0) = b. \end{array} \right\}$ (*)

(+)

Solo hace falta comprobarlo (solo las funciones

no piden algo más que solo las funciones verifican (*)

del tipo $f(x) = b\operatorname{sen} x + a\cos x$

Sea $y(x) = \cos(x+y)$. $\quad y(0) = \cos y$

$y'(x) = -\operatorname{sen}(x+y)$ $\quad$ con $\quad y'(0) = -\operatorname{sen} y$

$y''(x) = -\cos(x+y)$

Luego y verifica (*) y no le queda más

remedio que ser

$y(x) = \cos(x+y) = -\operatorname{sen} y \operatorname{sen} x + \cos y \cos x$.

(+). Si y verifica (*) sea $h(x) = f(x) - y(x) = b\operatorname{sen} x + a\cos x - y(x)$

entonces $h + h'' = 0$ y $h(0) = h'(0) = 0$. Ahora

$2h'h + 2h'h'' = 0 \iff (h^2 + (h')^2)' = 0 \Rightarrow h^2 + h'^2 = cte$

como $h^2(0) + h'^2(0) = 0 \Rightarrow h^2 + h'^2 = 0 \Rightarrow h = h' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f = y}}$

DERIVADAS III

PROBLEMA 15:

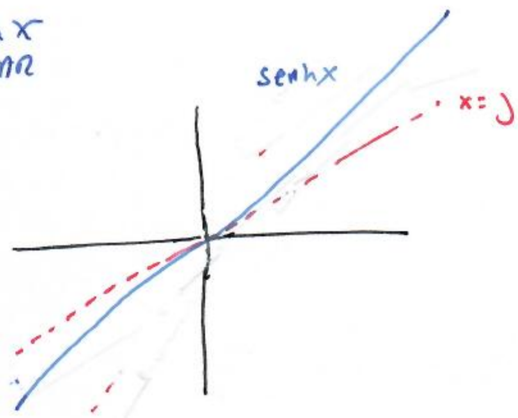
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{senh}' x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

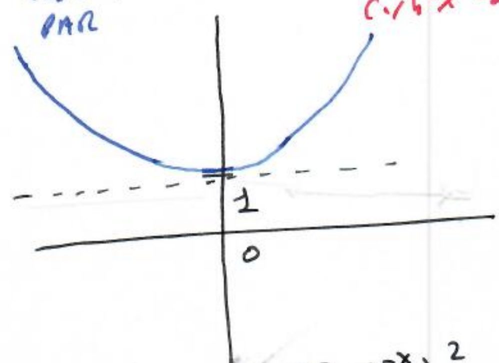
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \operatorname{tgh}' x = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

VER DEBAJO CALC. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

senh x IMPAR



cosh x PAR



• $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2}{4} - \left(\frac{\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} - 2}{4}\right) = \frac{4}{4} = 1$$

•• $\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{4}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = 1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

••• $\operatorname{senh}(x+y) =$ COMO EL PROBLEMA 14:

$f(x) = b \operatorname{senh} x + a \cosh x$

SI $\begin{cases} f - f'' = 0 \\ f(0) = a \text{ y } f'(0) = b \end{cases}$ $\Rightarrow$ NECESARIAMENTE

ASÍ SI $y = \operatorname{senh}(x+y)$ $\quad y(0) = \operatorname{senh} y$

$y' = \cosh(x+y)$ $\quad y'(0) = \cosh y$

$y'' = \operatorname{senh}(x+y)$

$\Rightarrow y(x) = \cosh y \operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y \cosh x.$

DERIVADAS III

CONTINUACIÓN

PROBLEMA 15:

- $((\operatorname{senh})^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

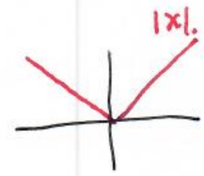
- $((\cosh)^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

- $((\operatorname{tgh})^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(\operatorname{tgh})'((\operatorname{tgh})^{-1}(x))} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

PROBLEMA 16:

SEA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

f ES CONVEXA.



f NO TIENE POR QUÉ SER DERIVABLE

c) ES LA DEFINICIÓN DE f CÓNCAVA.

d) ES LA SOLUCIÓN CORRECTA.

PROBLEMA 17:

SEAN $x, y \in \mathbb{R}$ Y $\alpha \in [0,1]$

POR SER f CONVEXA

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

POR SER g CRECIENTE

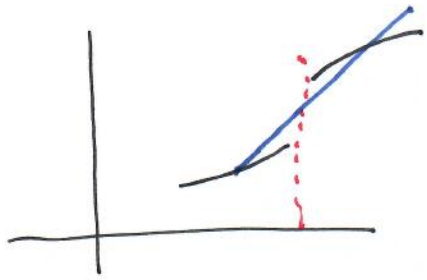
$$g(f(\alpha x + (1-\alpha) y)) \leq g(\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)) \underset{g \text{ CONVEXA}}{\leq}$$

$$\leq \alpha\, g(f(x)) + (1-\alpha)\, g(f(y))$$

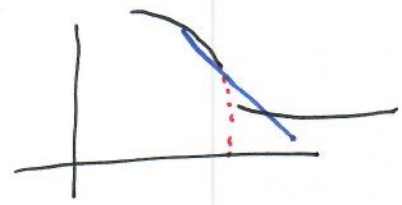
ASÍ $g \circ f(\alpha x + (1-\alpha) y)) \leq \alpha\, g \circ f(x) + (1-\alpha)\, g \circ f(y)$.

DERIVADAS III

PROBLEMA 18:) Por ser f monótona, si tiene alguna discontinuidad es de salto



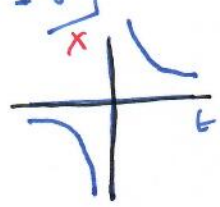
o



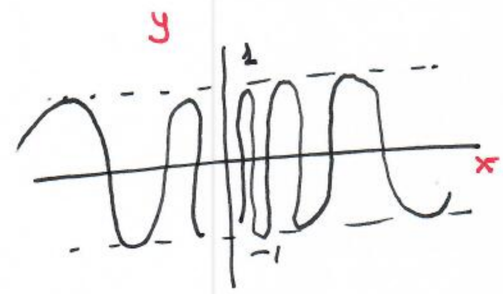
En cualquier caso no parece compatible el salto con ser f convexa

PROBLEMA 19:)

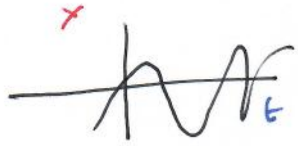
$x(t) = \frac{1}{t}$



$\frac{1}{t} \to 0$ as $t \to \pm\infty$ $\Rightarrow$



$y(t) = \operatorname{sen} t$

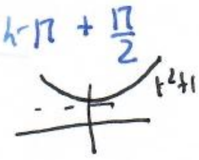


Puntos con tangente paralela a $y=0$; vector director $(1,0)$.

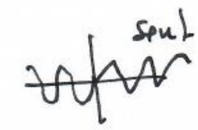
$x'(t) = -\frac{1}{t^2} \neq 0 \quad \forall\, t \neq 0$

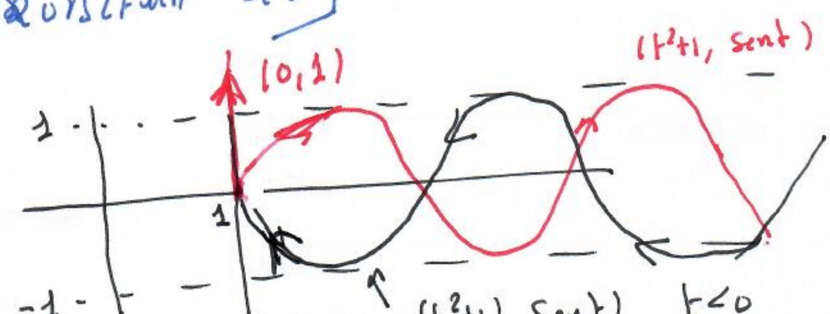
$y'(t) = \cos t = 0 \iff t = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

PROBLEMA 20:) $x(t) = t^2+1$



$y(t) = \operatorname{sen} t$

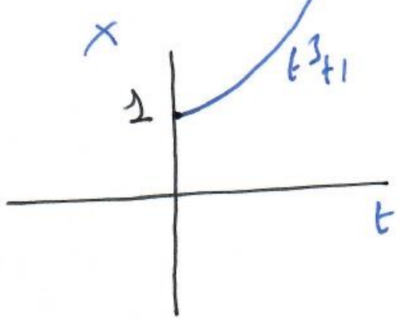


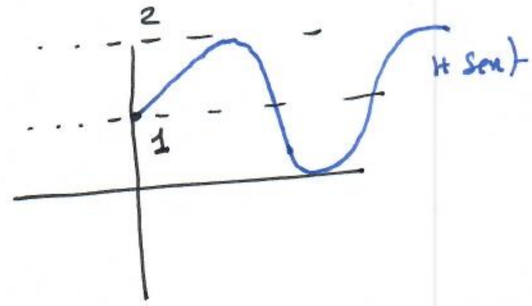


b) $(1,0) = (x(0), y(0))$; así $(x', y') = (2t, \cos t)$ y $(x'(0), y'(0)) = (0,1)$

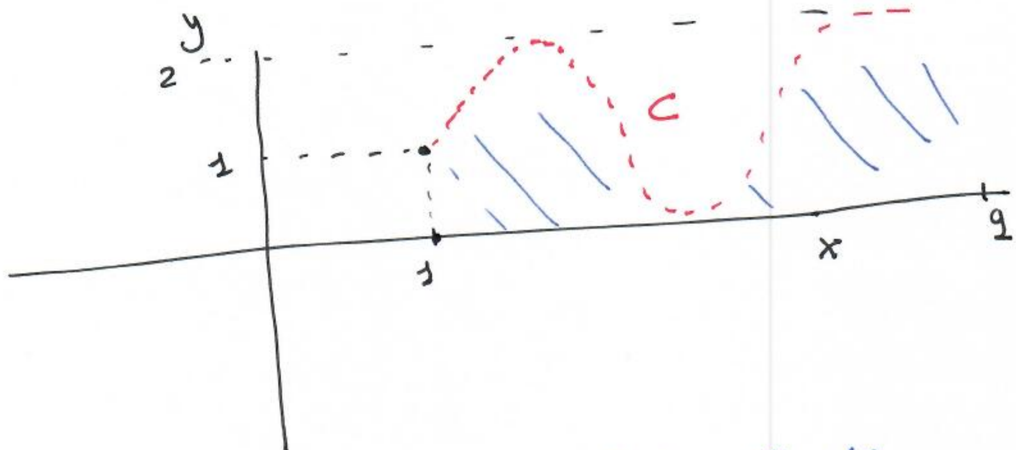
DERIVADAS III

PROBLEMA 21: $C : \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t^3+1 \; ; \; y = 1 + \operatorname{sen} t, \; t \geq 0 \}$





LUEGO



b) $y(x) \geq 0$, EL ÁREA POR DEBAJO DE LA CURVA HASTA EL EJE $y = 0$, VIENE DADA

POR $\displaystyle\int_1^9 y(x)\,dx = \int_0^2 (1+\operatorname{sen} t)\, 3t^2\,dt =$

CAPÍTULO SIGUIENTE

$x = t^3+1$

$y(x(t)) = 1 + \operatorname{sen} t$

$dx = 3t^2\,dt$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$x = 9 \Rightarrow t = 2$

CAMBIO DE VARIABLE

$$= \int_0^2 3t^2\,dt + \int_0^2 3t^2 \operatorname{sen} t\,dt$$

← INTEGRAL INMEDIATA → ← POR PARTES DOS VECES →

COMO VEREMOS EN EL CAPÍTULO SIGUIENTE