DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL III.

1.- La función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2), \quad x \in [0,1]$ es:

a) creciente b) no acotada c) positiva d) concava.

2.- Dadas dos funciones $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $(a,b)\backslash\{x_0\}$, tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)\backslash\{x_0\}$. Si existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, prueba que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

3.- Dadas dos funciones $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ derivables, tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \geq x_0 > 0$. Si existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, prueba que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

(**Indicación:** considera $f(1/x)$ y $g(1/x)$).

4.- Dadas dos funciones $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $(a,b)\backslash\{x_0\}$, tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ y con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)\backslash\{x_0\}$. Si existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, prueba que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

5.- Sea $f(x) = ax + b + P(x)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y P es un polinomio cuyos términos son todos de grado par y cuyos coeficientes son todos positivos. Estudia la convexidad de f en $\mathbb{R}$.

6.- Dada una función f definida y continua en $[0,\infty)$ con $f(0) = 0$, f derivable en $(0,\infty)$ y f' creciente, se define la función $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Prueba que la función g es creciente.

7.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) La gráfica de $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 3$ tiene 5 puntos donde las respectivas rectas tangentes son paralelas a $y = 0$.

b) La gráfica de $f(x) = 3x^2 + x + 1$ tiene un único punto donde la recta tangente en ese punto es paralela a $y = 0$.

c) La gráfica de $f(x) = 3x^3 + x + 1$ tiene dos puntos donde las respectivas rectas tangentes son paralela a $y = 0$.

d) La gráfica de $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 1$ tiene dos puntos donde las respectivas rectas tangentes son paralela a $x = 0$.

8.- Prueba las siguientes desigualdades:

a) $x + 1 \leq e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) $\ln(x+1) < x$ para todo $x > 0$.

c) $1 - \frac{a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1$ para $0 < a < b$.

9.- Sea f continua en $[a,b]$ y con derivada segunda en (a,b). Se supone que en el segmento que une los extremos de la gráfica de f hay algún punto de ella. Demuestra que existe $c \in (a,b)$ con $f''(c) = 0$.

10.- Se considera una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ para la cuál existe f'''. Entonces $c \in (a,b)$ es un punto de inflexión de f si

a) $f''(c) = 0$.

b) $f''(c) = 0$ y $f'''(c) > 0$.

c) $f''(c) = 0$ y $f'''(c) = 0$.

d) Existe $\delta > 0$ de modo que f o bien es convexa en $(c-\delta, c+\delta)$ o bien es concava en $(c-\delta, c+\delta)$.

11.- Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9}$ d) $f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$ f) $f(x) = x^3\sqrt{4-x^2}$ g) $f(x) = 3\operatorname{sen}(x-2)$ h) $f(x) = \frac{x}{4} - \sec x$

i) $f(x) = e^{-|x|}$ j) $f(x) = e^{-1/x^2}$ k) $f(x) = \arctan(3x - x^3)$ l) $f(x) = \ln(x^2 - x)$

ll) $f(x) = |x|^{-1}\ln(1+|x|)$ m) $f(x) = x\ln(x^2) - x^2$ n) $f(x) = \sqrt{1/x + 3/x^2}$

ñ) $f(x) = 1 + ax^2 + x^4$ o) $f(x) = a/x^2 + 1/x$ p) $f(x) = x^a \operatorname{sen}(1/x)$ q) $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

r) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ s) $f(x) = \frac{2x^3-5x^2+4x+1}{2x^2-x-1}$ t) $f(x) = xe^{1/x}$ u) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2\ln x$

12.- Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$, estudia

- Los puntos de continuidad.
- Los puntos donde f es derivable.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- La convexidad y concavidad.
- Las asíntotas a las gráfica de f si las tiene.

Representa la gráfica de la función.

13.- Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$. Se toman $x_0, a, b \in [0, \pi]$, con $x_0 \leq a < b$. Prueba que $f'(x_0) \geq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

14.- Sea f tal que existe f'' en todo $\mathbb{R}$. Se sabe que si $f + f'' = 0$, $f(0) = a$ y $f'(0) = b$, entonces necesariamente $f(x) = b\operatorname{sen} x + a\cos x$. Demuestra que $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$.

Prueba que la tal función f es única.

15.- Se consideran las funciones *seno hiperbólico* $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, *coseno hiperbólico* $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ y *tangente hiperbólica* $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$. Calculas sus derivadas. Representa sus respectivas gráficas. Además comprueba que

- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
- $1/\cosh^2 x = 1 - \tanh^2 x$
- $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y + \cosh x \cosh y$.

Calcula las derivadas de las respectivas funciones inversas.

16.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. f es convexa si:

a) $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) f' es creciente en $\mathbb{R}$.

c) Para todo par $x, y \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in [0,1]$ se tiene que

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

d Para todo par $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, y para todo $x \in (a,b)$ se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

17.- Demuestra que si f y g son convexas y g es creciente, entonces $g \circ f$ es convexa.

18.- Demuestra que una función monótona y conxexa es continua.

19.- a) Representa la curva plana dada por las siguientes ecuaciones paramétricas $x(t) = 1/t$; $y(t) = \operatorname{sen} t$.
b) Encontra el conjunto de los puntos de la curva cuya tangente en tales puntos sea paralela al eje de abcisas.

20.- a) Representa la curva del plano dada por las siguientes ecuaciones paramétricas $x = t^2 + 1$, $y = \operatorname{sen} t$.
b) Calcula la recta tangente a la curva en el punto $(1,0)$.

21.- Sea $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = t^3 + 1, \ y = 1 + \operatorname{sen} t, \ t > 0 \}$.
a) Representa la curva plana C.
b) Calcula el área delimitada entre la curva y el segmento $[1,9]$ del eje de las $''x''$ (deja esta última parte del ejercicio para después de ver el capítulo siguiente de Teoría).