INTEGRALES DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

PROBLEMA 1: a) "$\leq$" RELACIÓN DE ORDEN

- REFLEXIVA, $\forall P \in P[a,b]$ es claro que $P \subseteq P$, luego $P \leq P$

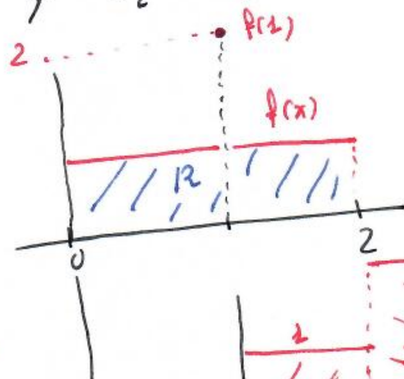
- ANTISIMÉTRICA. Para $P_1, P_2 \in P[a,b]$, $P_1 \leq P_2$ y $P_2 \leq P_1 \iff P_1 \subseteq P_2$ y $P_2 \subseteq P_1 \iff P_1 = P_2$.

- TRANSITIVA para $P_1, P_2, P_3 \in P[a,b]$ si $P_1 \leq P_2$ y $P_2 \leq P_3 \iff P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3$, luego $P_1 \subseteq P_3$ y así $P_1 \leq P_3$.

b) $(P([a,b]) \leq)$ NO es un conjunto completamente ordenado. Sean $t_1, t_2 \in (a,b)$ con $t_1 < t_2$. Sean $P_1 = \{a, t_1, b\}$ y $P_2 = \{a, t_2, b\}$. Así ni $P_1 \subseteq P_2$ ni $P_2 \subseteq P_1$.

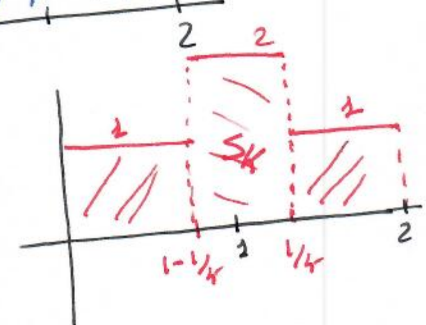
c) Para $P_1, P_2 \in P([a,b])$ $P_3 = P_1 \cup P_2$ verifica que $P_1 \leq P_3$ y $P_2 \leq P_3$.

PROBLEMA 2:



ÁREA DE R $= 2$.

$P_k = \{0, 1-1/k, 1+1/k, 2\}$



$S_k = 1 \times [(1-1/k) - 0] + 2 \times [(1+1/k) - (1-1/k)] + 1 \times [2 - (1+1/k)] =$

$= S(f, P_k) = 1 - \frac{1}{k} + \frac{4}{k} + 1 - 1/k$

$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{k} + \frac{4}{k} + 1 - 1/k = 2 =$ ÁREA DE R.

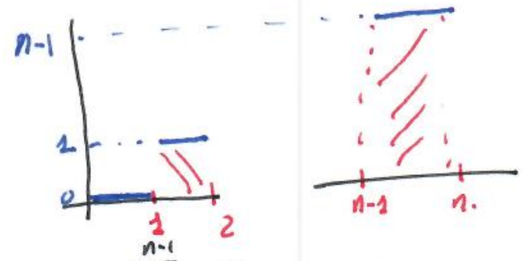
INTEGRALES DE FUNCIONES

PROBLEMA 3:

$$I_n = \int_0^n [x]\,dx =$$

$$[\ \ ] \quad [0,n] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow [x]$$



$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} [x]\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} k\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} k =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

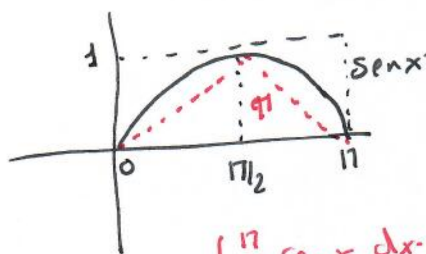
$[x]$ es continua en $[0,n] \setminus \{1,2,\dots,n-1\}$

por lo visto en el ejercicio 2, es integrable

suma de los $(n-1)$ primeros enteros.

PROBLEMA 4:

$$\pi/2 \le \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \le \pi.$$



$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \le \int_0^\pi 1\,dx = \pi.$$

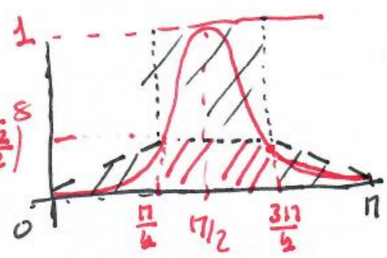
• $0 \le \operatorname{sen} x \le 1 \Rightarrow$

•) $f(x) = \operatorname{sen} x$ es cóncava, ya que $f' = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x \le 0 \ \forall x \in [0,\pi]$

Área de $T = \frac{\pi \times 1}{2} \le \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ área por debajo de la gráfica

a) $\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x\,dx$

$\operatorname{sen}^8 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$



$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 \le \int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x\,dx \le$$

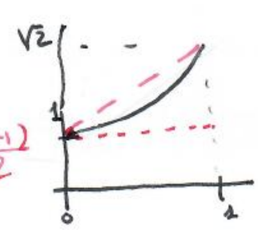
$$\le \pi/2 + 2\,\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$$

$f(x) = \operatorname{sen}^8 x$; $f'(x) = 8\operatorname{sen}^7 x \cos x$

$f''(x) = 56 \operatorname{sen}^6 x \cos^2 x - 8 \operatorname{sen}^8 x$

$= 8 \operatorname{sen}^6 x \left[7\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right]$

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 > \frac{\pi}{4}$ y $x_0 < \pi - \frac{\pi}{4}$



c) $1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le 1 + \frac{(\sqrt{2}-1)}{2}$

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} > 0$

y $f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} =$

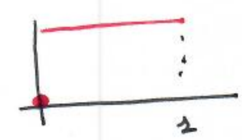
$= \frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$ convexa

INTEGRALES DE FUNCIONES

PROBLEMA 5º) MIRANDO EN LA TABLA DE DERIVADAS AL REVES

- PARA x , $\frac{x^2}{2}$ ES UNA PRIMITIVA
- PARA x^2 , $\frac{x^3}{3}$ " " "
- PARA $\operatorname{sen} x$, $-\cos x$ " " "
- PARA $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ " " "
- PARA $\frac{1}{1+x^2}$, $\operatorname{Arctg} x$ " " "
- PARA $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, $\operatorname{tg} x$ ES UNA PRIMITIVA
- PARA $\frac{1}{x}$, $\ln x$ ES UNA PRIMITIVA
- PARA x^2+1 , $\frac{x^3}{3} + x$ ES UNA PRIMITIVA.

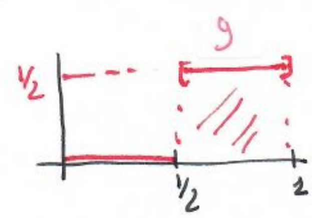
PROBLEMA 6º) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x \in (0,1] \\ 0 & \text{SI } x = 0 \end{cases}$



COMO EN EL PROBLEMA 2º)

$$\int_0^1 f(x) = 1$$

PROBLEMA 7º)



$\int_0^1 g = 1/2$

COMO EN EL PROBLEMA 2.

SEA $P_4 = \{0, 1/2 - \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$

$S(g, P_4) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \times 0 + \frac{1}{4} + 1/2 \times 1$ ASI $S(g, P_4) - I(g, P_4) = \frac{1}{4} \underset{4 \to \infty}{\longrightarrow} 0$

$I(g, P_4) = 0 + 1/2 \times 1$

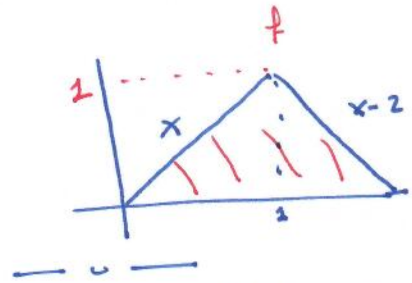
LO QUE IMPLICA g INTEGRABLE Y

COMO $\overline{\int} g - \underline{\int} g \leq S(g, P_4) - I(g, P_4) = \frac{1}{4} \to 0$

$$\Rightarrow \overline{\int} g = \underline{\int} g = \lim_{4 \to \infty} S(g, P_4) = 1/2.$$

INTEGRALES DE FUNCIONES

PROBLEMA 8:

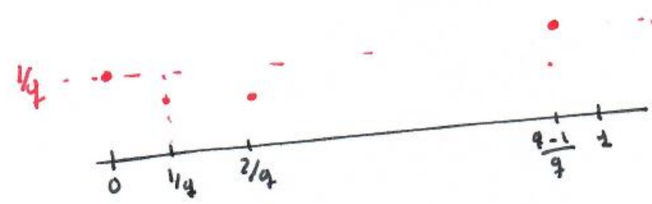


f es continua, es integrable y $\int_0^2 f = \frac{2 \times 1}{2} = 1$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \in [0,1] \end{cases}$$ fracción irreducible

g es continua en $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, como vimos, pero no lo es en $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Sea $\varepsilon > 0$, sea $q \in \mathbb{N}$ con



Sea $\{1, 1/2, 2/3, 1/3, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{q-1}, \dots, \frac{q-2}{q-1}\} = A$

Card A es a lo más $\sum_{k=1}^{q-1} k^2 = 1 + 4 + \dots + q-1 = R$

y le añadimos el cero, ordenamos los elementos de A

$P = \{0, \frac{1}{q-1}, \dots \frac{1}{q-2} \quad \frac{1}{2} \quad \dots \frac{q-2}{q-1}, 1\}$

$= \{a_0, a_1, \dots \quad a_k\}$

Se considera $N(R) \in \mathbb{N}$, $N(R) > R^2$ y suficientemente grande para que $(a_l - \frac{1}{N(R)}, a_l + \frac{1}{N(R)}) \cap P = \{a_l\}$.

Así $\tilde{P} = \{0, 0 + \frac{1}{N(R)}, a_1 - \frac{1}{N(R)}, a_2 - \frac{1}{N(R)}, \dots\}$

Así $S(g, \tilde{P}) \leq \frac{1}{q} \times 1 + \sum_{l=0}^{k} \frac{2}{N(R)} \times 1 \leq \frac{1}{q} + \frac{2R}{R^2} \leq \frac{1}{q} + \frac{2}{q}$

$I(g, \tilde{P}) \geq 0$

Así $S(g, \tilde{P}) - I(g, \tilde{P}) \leq \frac{3}{q} \xrightarrow[q \to \infty]{} 0$; g es integrable

y como $\inf S(g, \tilde{P}) = 0$, se sigue que $\int_0^1 g = 0$.

INTEGRALES DE FUNCIONES

PROBLEMA 9:) SUPONGAMOS QUE f ES CRECIENTE.

SUPONGAMOS QUE $P_n = \{a, a+\frac{b-a}{n}, \dots, b\}$

ES LA PARTICIÓN DE $[a,b]$ EN n PARTES IGUALES. ASÍ

$$S(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1}-t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) \frac{b-a}{n}$$

$$I(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (t_{i+1}-t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \frac{b-a}{n}$$

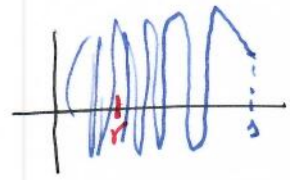
ASÍ $S(f,P) - I(f,P) = \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\right] =$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\cancel{f(t_1)} + \cancel{f(t_2)} + \dots + f(b) - f(a) - \cancel{f(t_1)} - \dots - \cancel{f(t_{n-1})}\right]$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$, LUEGO POR

EL CRITERIO DE RIEMANN LA FUNCIÓN ES INTEGRABLE.

PROBLEMA 10:) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



SEA $r>0$ $\quad f|_{[r,1]}$ ES CONTINUA, LUEGO INTEGRABLE

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P_{r,\varepsilon} = \{r = t_0 < t_1 < \dots \ t_n = 1\}$

TAL QUE : $S(f|_{[r,1]}, P_{r\varepsilon}) - I(f|_{[r,1]}, P_{r\varepsilon}) \le \varepsilon/2$

SEA $P = \{0, r, t_1, \dots \ t_n\}$.

$$S(f,P) - I(f,P) = 2r + S(f_{[r,1]}, P_{r\varepsilon}) - I(f_{[r,1]}, P_{r\varepsilon}) \le$$

$M_0 = \sup\{f : t \in [0,r]\} = 1$

$m_0 = \inf\{f : t \in [0,r]\} = -1$

$$\le 2r + \varepsilon/2 \le \varepsilon$$

SI $r < \frac{\varepsilon}{4}$.

LUEGO f ES INTEGRABLE

INTEGRALES DE FUNCIONES

PROBLEMA 11:) COMO EN EL PROBLEMA ANTERIOR SEA $c>a$ CON $(M-m)(c-a)<\frac{\varepsilon}{2}$

SEA $\varepsilon>0$, SEA $M=\sup f$ $m=\inf M$

SEA $c>a$. POR SER $f_{|[c,b]}$ INTEGRABLE

$$\exists\ P_c = \{c=t_0<t_1 \ldots < t_n=b\} \text{ PARTICIÓN CON}$$

$$S(f_{|[c,b]}, P_c) - I(f_{|[c,b]}, P_c) \le \varepsilon/2$$

SEA $P=\{a,\ c=t_0<t_1 \ldots\ t_n=b\}$

ENTONCES

$$S(f,P) - I(f,P) \le (M-m)(c-a) + S(f_{|[c,b]},P_c) - I(f_{|[c,b]},P_c)$$

$$\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

LUEGO f ES INTEGRABLE EN $[a,b]$

ASÍ PARA $c>a$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

TOMANDO LÍMITES, COMO

$$\left|\int_a^c f\right| \le \int_a^c |f| \le M(c-a) \xrightarrow[c\to a^+]{} 0$$

$$\lim_{c\to a^+} \int_a^b f = \int_a^b f = \underbrace{\lim_{c\to a^+}\int_a^c f}_{0} + \int_c^b f =$$

$$= \lim_{c\to a^+} \int_c^b f.$$

PROBLEMA 12:) $\int_0^1 x^2\,dx$ $\quad f(x)=x^2$ ES CONTINUA

SEA $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots 1\}$ (n PARTES IGUALES), SABEMOS

QUE

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 =$$

USANDO LA INDUCCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\, \frac{1}{6}(n-1)\,n\,(2(n-1)+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} = 1/3$$

INTEGRALES DE FUNCIONES

PROBLEMA 13:] YA LO HEMOS USADO EN EL PROBLEMA ANTERIOR. (VER TEORÍA)

SEA $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots \frac{k}{n}, \dots 1\}$ LA PARTICIÓN EN n.

PARTES IGUALES DEL INTERVALO $[0,1]$

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ CONTINUA, COMO $[0,1]$ ES CERRADO, ASÍ f ES UNIFORMEMENTE CONTINUA.

$$S(f, P_n) - I(f, P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

y $0 < S(f, P_n) - \int_0^1 f \leq S(f, P_n) - I(f, P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ASÍ $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, P_n) = \int_0^1 f$

AHORA $S(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i)$ $\quad M_i = \sup\{f(t) : t \in [t_i, t_{i+1}]\}$ $\quad M_i = f(\tilde{t}_i)$.

AHORA $t_{i+1}, \tilde{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]$ LUEGO $|\tilde{t}_i - t_i| \leq 1/n$

PARA ESO $\exists\, \delta > 0$ { Y EXISTE n_0 TAL QUE TOMAMOS $1/n < \delta$ } SI $|x-y| < \delta < \frac{1}{n}$

DE MODO QUE $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

ASÍ $\left| S(f, P_n) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |f(\tilde{t}_i) - f(t_{i+1})| \leq$

$$\leq \frac{1}{n}\, n\, \varepsilon = \varepsilon.$$

LUEGO LAS SUCESIONES $S(f, P_n)$ y $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)$ CONVERGEN A LO MISMO.

PROBLEMA 14:] a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$$

EJER. 13:

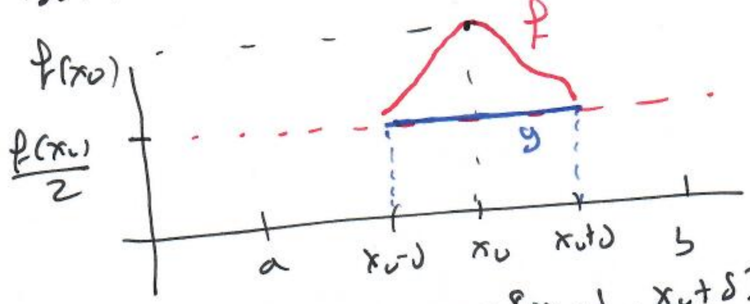
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2(1+(\frac{k}{n})^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

INTEGRALES DE FUNCIONES

PROBLEMA 15: SUPONGAMOS QUE $f \neq 0$, ASÍ EXISTE $x_0 \in [a,b]$ CON $f(x_0) > 0$ (*). POR SER f CONTINUA, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ SE TIENE QUE $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$

(*) SI $f(x_0) < 0$ SE PROCEDE DE FORMA ANÁLOGA.



SEA $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \\ 0 & \text{SI } x \notin [x_0-\delta, x_0+\delta] \end{cases}$

$\boxed{g \text{ INTEGRABLE}}$

ASÍ $\int_a^b f \cdot g = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) \geq \frac{f(x_0)}{\cancel{2}} \cancel{2}\delta > 0$, LO QUE CONTRADICE LA HIPÓTESIS.

PROBLEMA 16: a) COMO $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ TENEMOS QUE $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$

$S(f,P) \leq S(g,P) \leq S(h,P)$

Y $I(f,P) \leq I(g,P) \leq I(h,P)$

POR TANTO $\inf_P \{S(f,P)\} = \int_a^b f \leq \underbrace{\inf_P S(g,P)}_{= \overline{\int_a^b} g} \leq \int_a^b h = \inf_P \{S(h,P)\}$

POR OTRO LADO $\sup_P \{I(f,P)\} = \int_a^b f \leq \underbrace{\sup_P \{I(g,P)\}}_{= \underline{\int_a^b} g} \leq \int_a^b h = \sup_P \{I(h,P)\}$

ASÍ $\underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g = \int_a^b f$; g ES INTEGRABLE.

b) SEA $g(x) = x(b-a)$ PARA $x = \inf f$ E $y = \sup f$

TENEMOS QUE $x(b-a) = \inf f\,(b-a) \leq \int_a^b f \leq \sup f\,(b-a) = y(b-a)$

POR EL TEOREMA DE BOLZANO EXISTE $\mu \in (x,y)$ CON $\mu(b-a) = \int_a^b f$.

c) POR SER f CONTINUA, EXISTE $c \in [a,b]$ CON $f(c) = \mu$ CON μ LA DEL APARTADO b) (TAMBIÉN POR EL TEOREMA DE BOLZANO)

INTEGRALES DE FUNCIONES

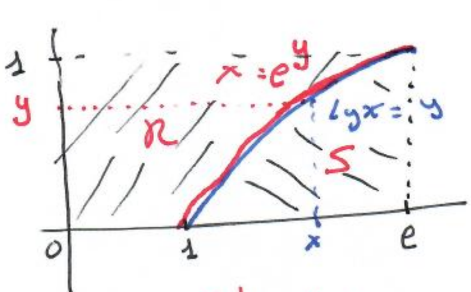
PROBLEMA 17:) SEA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ACOTADA. f ES INTEGRABLE SI.

d) $\underline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^b} f$ COMO SIEMPRE $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$,

SI SE DA LA OTRA DESIGUALDAD $\underline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^b} f$ ENTONCES $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ Y POR DEFINICIÓN f ES INTEGRABLE.

PROBLEMA 18:)

b)



e^x Y $\ln x$ INVERSAS

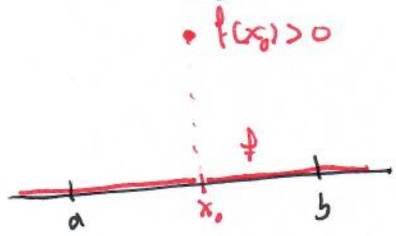
$$S = \int_1^e \ln x \, dx \qquad R = \int_0^1 e^y \, dy$$

LA UNIÓN (DISJUNTA) DE LAS REGIONES S Y R ES EL RECTÁNGULO $[0,e] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$, EL CUAL TIENE ÁREA e, ASÍ

$$\int_1^e \ln x \, dx + \int_0^1 e^y \, dy = e.$$

PROBLEMA 19:)

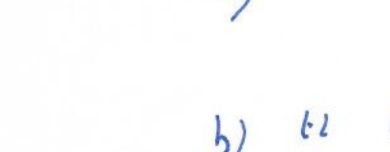
a)



f ES INTEGRABLE Y $\int_a^b f = 0$.

b) EL PROBLEMA 2:) ES UN CASO PARTICULAR DE ESTO. SEA M. COTA DE f.

SEA $\{d_1 < d_2 < \dots < d_k\} \subseteq [a,b]$ DISCONTINUIDADES DE f. SEA $\varepsilon > 0$, TOMAMOS δ TAL QUE $[d_\ell - \delta, d_\ell + \delta] \cap [d_j - \delta, d_j + \delta] = \emptyset$ $\ell \neq j$ DE MODO QUE $2\delta \cdot 2M < \frac{\varepsilon}{2k}$. PODEMOS TOMAR, f INTEGRABLE EN $[d_j + \delta, d_{j+1} - \delta]$, UNA PARTICIÓN P QUE INCLUYE LOS $d_\ell - \delta, d_\ell + \delta$ $\ell = 1 \dots k$ TAL QUE



$$S(f,P) - I(f,P) \leq \varepsilon/2 + \sum_{\ell=1}^{k} 2\delta \times 2M \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$ ¡f integrable!

INTEGRALES DE FUNCIONES

PROBLEMA 20: a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

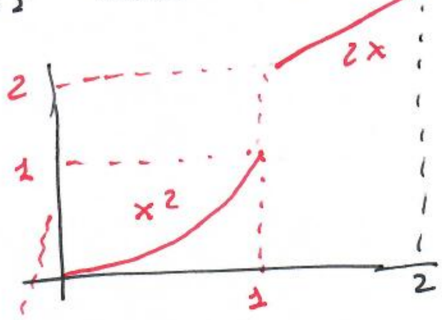
NO ES INTEGRABLE YA QUE $S(f,P) - I(f,P) = 2 \quad \forall P \in \mathcal{P}([0,1])$

b) SEA $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$ INTEGRABLE EN $[0,1]$

SEA $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - 1/q & \text{si } x = p/q \text{ irreducible} \end{cases}$ INTEGRABLE EN $[0,1]$ (VISTO EL PROBLEMA 8)

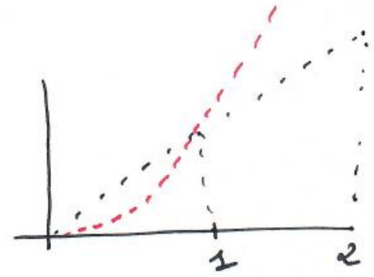
$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$ ¡NO ES INTEGRABLE!

PROBLEMA 21: a)



INTEGRABLE: UNA ÚNICA DISCONTINUIDAD (VER PROBLEMA 19)

b)



NO ES INTEGRABLE. SI LO FUESE $\int_0^1 f$ EXISTIRÍA, PERO

$\inf_P S(f,P) = \int_0^1 x$

Y $\sup_P I(f,P) = \int_0^1 x^2$

AMBOS NÚMEROS SON DISTINTOS

c) $f(x) = x \operatorname{sen} x$ ES CONTINUA, POR TANTO INTEGRABLE

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = (x-1)$ CONTINUA, SALVO QUIZÁS EN $x = 1$. INTEGRABLE.

PROBLEMA 22: SEA $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$; TAMPOCO

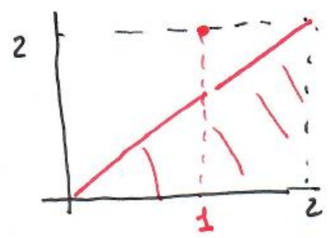
$f + g \equiv 0$ ES INTEGRABLE, PERO NO LO ES NI f NI g Y NO TIENE SENTIDO $\int f+g = \int f + \int g$.

$f - g$ ES INTEGRABLE Y NO

c) POR SER $f+g$ INTEGRABLE, ENTONCES $\int 2(f+g) = 2\int f+g$.

INTEGRALES DE FUNCIONES

PROBLEMA 23: a) SEA $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,2] \setminus \{1\} \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



f es continua salvo en $x=1$

f no es constante.

$\int_0^2 f(t)\,dt = 2$ ÁREA DEL TRIÁNGULO

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [3,7] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [3,7] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

LA MISMA IDEA QUE LA FUNCIÓN DE DIRICHLET.