TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

PROBLEMA 1:) UNA FUNCIÓN f INTEGRABLE EN $[0,1]$ ESTÁ ACOTADA; ES DECIR, EXISTE $M>0$ TAL QUE

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,1]$$

ASÍ $\left| \int_0^{a_n} f \right| \leq \int_0^{a_n} |f| \leq M a_n.$

LUEGO $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{a_n} f \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M a_n = M \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

POR HIPÓTESIS.

ASÍ LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f$ ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

PROBLEMA 2:) a) $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2 \, dt$ $\quad \operatorname{sen} t^2$ ES CONTINUA EN $[0,1]$; POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$F'(x) = \operatorname{sen} x^2$$

c) $F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1-t^2} \, dt = \int_{x^2}^{0} \sqrt{1-t^2} \, dt + \int_0^{x} \sqrt{1-t^2} \, dt =$

$$= -\int_0^{x^2} \sqrt{1-t^2} \, dt + \int_0^x \sqrt{1-t^2} \, dt$$

SI $t \in [0,1]$, LA FUNCIÓN $\sqrt{1-t^2}$ ES CONTINUA; SI $x \in [0,1] \Rightarrow [0,x^2] \subseteq [0,1]$ y $[0,x] \subseteq [0,1]$ Y POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y LA REGLA DE LA CADENA

$$F'(x) = -2x\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1-x^2}.$$

e) $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t) \, dt$

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

PROBLEMA 3:) TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$f(x) = \int_0^{x^2-1} \left| \frac{\operatorname{sen} s\pi}{1+s^2} \right| ds$$

$\left| \frac{\operatorname{sen} s\pi}{1+s^2} \right|$ es continua en todo $\mathbb{R}$; por el teorema fundamental del cálculo

$$f'(x) = \left| \frac{\operatorname{sen} (x^2-1)\pi}{1+(x^2-1)^2} \right| 2x$$

Luego $f'(3) = \left| \frac{\operatorname{sen} 8\pi}{1+8^2} \right| 6 = 0$

$\operatorname{sen} 8\pi = 0$

PROBLEMA 4:)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x e^{t^2}dt & \text{si } x>0 \\ \cos x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

a) F es claramente continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

en $x=0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}}{1} = 1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = 0$$

Luego $F(0)=1$ y es continua

b) $$F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\left[x e^{x^2} - \int_0^x e^{t^2}dt \right] & \text{si } x>0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

c) Como $\cos x$ es derivable en $x=0$, $F'(0^-)=0$

Ahora $\lim_{h\to 0^+} \frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h}\int_0^h e^{t^2}dt - 1}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^h e^{t^2}dt - h}{h^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h^2}-1}{2h} \underset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h e^{h^2}}{2} = 0$$; Así $F'(0)=0$

d) $\lim_{x\to 0^-} F'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\operatorname{sen} x = 0$; $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}}{x} - \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x e^{x^2} - \int_0^x e^{t^2}dt}{x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-e^{x^2}}{2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \dots = 0$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

PROBLEMA 5º) $f(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$ ya que $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$

Así $F(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ es una función derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{y} \quad F'(0)=1$$

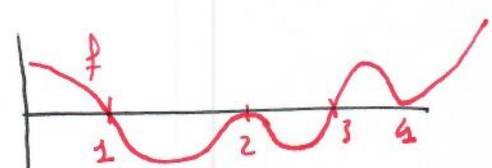
COMPROBACIÓN $\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h} \underset{F(0)=0}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt}{h} \underset{\text{L'Hôpital}}{=}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

AHORA $F'(x)=0 \iff \underset{x\neq 0}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0}$, PARA $x=0$ $F'(0)=1$

ASÍ $\operatorname{sen} x = 0 \underset{x\neq 0}{\iff} x = k\pi \quad \forall k\in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$

PROBLEMA 6º) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$



f es continua, por tanto F derivable

con $F'(x)=f(x)$

$$\text{Así } F'(x)\begin{cases} >0 & \text{si } x<1 \Rightarrow F \text{ creciente} \\ <0 & \text{si } x\in(1,3) \Rightarrow F \text{ decreciente} \\ >0 & \text{si } x>3 \Rightarrow F \text{ creciente}\end{cases}$$

$x=1$ MÁXIMO RELATIVO

$x=3$ MÍNIMO RELATIVO

PROBLEMA 7º) $f(x)=\int_0^x (1+\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 t))\,dt$

$f'(x) = 1+\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x) \geq 0$. Además $\operatorname{sen}^2 t \in [0,1]$ y $\operatorname{sen} x \geq 0$ si $x\in[0,1]\subset[0,\pi/2]$

ASÍ $f'(x)>0$, f es estrictamente creciente, continua, es inyectiva y existe f^{-1} también continua, creciente y derivable. AHORA $f(0)=0$, luego $f^{-1}(0)=0$ y

$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$; así $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

PROBLEMA 8:) $f(x) = \int_0^x 1 + e^{-t^2}\, dt$

- Dom $f = \mathbb{R}$; ya que $1 + e^{-t^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y por tanto integrable en $(0, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = 1 + e^{-x^2} > 0$, así f es estrictamente creciente.

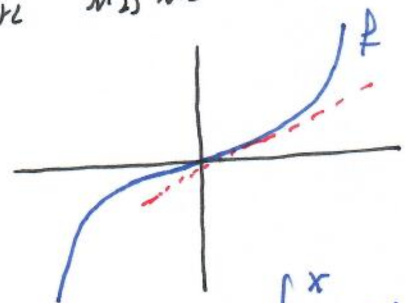
- $f''(x) = -2x\, e^{-x^2} \begin{cases} > 0 & \text{si } x < 0 \Rightarrow f \text{ convexa} \\ < 0 & \text{si } x > 0 \Rightarrow f \text{ concava} \end{cases}$

$x = 0$ (donde $f(0) = 0$) es un punto de inflexión)

- Como $\int_0^x 1 + e^{-t^2}\, dt \geq 1\,(x - 0) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

y del mismo modo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



PROBLEMA 9:) $F(x) = \int_0^x -3t^2 + 24t - 45\, dt$

$F'(x) = -3x^2 + 24x - 45$

F decrece en $(-\infty, x_0)$ x_0 mínimo

F crece en (x_0, x_1) x_1 máximo

F decrece en (x_1, ∞)

$F''(x) = -6x + 24 \begin{cases} > 0 & \text{si } x < 4 \\ < 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

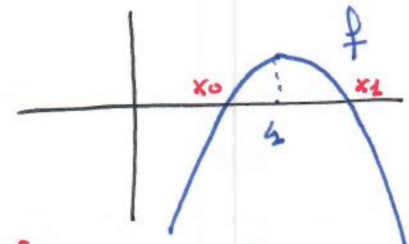
$f(t) = -3t^2 + 24t - 45$

$f'(t) = -6t + 24 = 0 \iff t = 4$

$f(4) = -3 \times 16 + 24 \times 4 - 45 =$

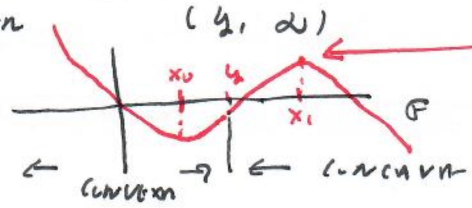
$= -48 + 96 - 45 > 0$

Así



F es convexa en $(-\infty, 4)$

F " concava en $(4, \infty)$

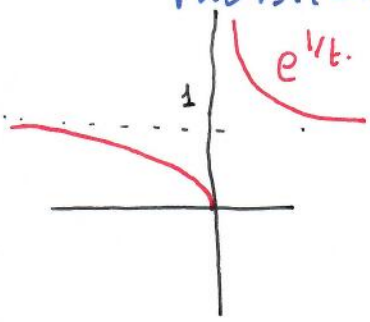


¿ $F(x_1) > 0$?

No tiene que ser así, hay que comprobarlo.

Teorema fundamental del cálculo

Problema 10:



$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\int_0^{x^2} e^{1/t}\,dt}{x^3} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{2x\, e^{1/x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3}\frac{e^{1/x^2}}{x} = \infty.$$

Problema 11: $x \in [a,b]$, $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ continua

y $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$

Derivando $G'(x) = 0 - f(x) = -f(x)$.

Problema 12: $F(x) = \int_0^x x\, f(s)\,ds = x \int_0^x f(s)\,ds$

x constante, dentro de la integral

$G(x) = \int_0^x x^2 f(s)\,ds = x^2 \int_0^x f(s)\,ds$

F, G son derivables por ser ambas producto de funciones derivables

$(F+G) = (x+x^2)\int_0^x f(s)\,ds$

Luego $(F+G)' = (1+2x)\int_0^x f(s)\,ds + (x+x^2)\, f(x)$.

Problema 13: Sea $g(t) = f(t-c)$ $t \in [a+c, b+c]$.

a) Sea $P = \{t_0 = a < t_1 \dots < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$

$P_c = \{t_0 + c = a + c < t_1 + c < t_n + c = b + c\}$ es una partición de $[a+c, b+c]$

Sea M_i y m_i para f,

y sea $M_{i,c} = \sup\{f(t-c) : t \in [t_i + c, t_{i+1} + c]\} = M_i$

$m_{i,c} = \inf\{f(t-c) : t \in [t_i + c, t_{i+1} + c]\} = m_i$

Luego $S(f,P) = S(g,P_c)$ y $I(f,P) = I(g,P_c)$.

Luego parece claro que $\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} g$.

b) $g(x) = \int_{x-c}^0 f(t) + \int_0^{x+c} f(t) = -\int_0^{x-c} f(t) + \int_0^{x+c} f(t)$

Derivando $g'(x) = -f(x-c) + f(x+c)$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

PROBLEMA 14): $f^2(x) = 2\int_0^x f \qquad x>0$

SI f ES CONTINUA, $\int_0^x f$ ES DERIVABLE, POR TANTO $f^2(x)$ ES DERIVABLE.

SUPONGAMOS QUE f ES DERIVABLE, ENTONCES

$$(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$$
$$\parallel$$
$$\left(2\int_0^x f\right)' = 2f(x)$$

$\Big\}\ \underset{f(x)>0}{\Longrightarrow}\ f'(x)=1$

LUEGO f Y $g(x)=x$ TIENEN LA MISMA DERIVADA.

ASÍ $f(x) = x + k$.

AHORA $\lim_{x\to 0^+} f^2(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\int_0^x f = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

COMO $\lim_{x\to 0^+} x+k = k$, IMPLICA QUE $k=0$

ASÍ SI f ES DERIVABLE, $f(x) = x$.

PROBLEMA 15): SEA $F(x) = \int_a^x f-g$.

COMO $f-g$ ES CONTINUA, F ES DERIVABLE. ADEMÁS

$F(a) = 0$ Y $F(b) = \int_a^b f-g = 0$.

POR EL TEOREMA DE ROLLE EXISTE $c\in(a,b)$ TAL QUE

$0 = F'(c) = f-g(c) \Rightarrow f(c) = g(c)$.

PROBLEMA 16): SEA $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)\,du = x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u f(u)\,du$

SEA $G(x) = \int_0^x \Big(\underbrace{\int_0^u f(t)\,dt}_{\text{CONTINUA, YA QUE ES DERIVABLE POR } f \text{ CONTINUA}}\Big)\,du.$

$F(0)=0$ Y $G(0)=0$

AHORA $F'(x) = \int_0^x f(u)\,du + \cancel{xf(x)} - \cancel{xf(x)}$

$G'(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow F(x) = G(x) + k$

IGUALES DERIVADAS

COMO $F(0) = G(0) = 0 \Rightarrow k = 0$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

PROBLEMA 17:

a) $\int_0^1 a^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a^{k/n} =$

PROBLEMA 13:
HOJA ANTERIOR

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a^{1/n})^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a^{1/n} - a^{n+1/n}}{1-a^{1/n}} \right) =$

SERIE GEOMÉTRICA

$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n}[1-a]}{n(1-a^{1/n})}$

POR OTRO LADO $\int_0^1 a^x\,dx = \int_0^1 e^{x\ln a}\,dx = \frac{e^{x\ln a}}{\ln a}\Big|_0^1 =$

REGLA DE BARROW

$= \frac{a}{\ln a} - \frac{1}{\ln a} = \frac{a-1}{\ln a}$

ASÍ $\frac{a-1}{\ln a} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n}[1-a]}{n(1-a^{1/n})}$

COMO $\lim_{n\to\infty} a^{1/n}[1-a] = (1-a)$, SE

SIGUE QUE $\boxed{\lim_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1) = \ln a.}$

b) $\int_1^2 \ln x\,dx$ PARA LA PARTICIÓN
$P_n = \{1, 1+1/n, \dots 1+\frac{k}{n}, \dots, 1+\frac{n}{n} = 2\}$

$\int_1^2 \ln x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(1+k/n)^{1/n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n} \right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n}) \cdots (1+\frac{n}{n})} \right) =$

POR OTRO LADO $\int_1^2 \ln x\,dx \underset{\text{PARTES}}{=} x\ln x\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = \ln 4 - 1 =$
$= \ln 4 - \ln e = \ln\frac{4}{e}$

$= \ln 4/e.$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

PROBLEMA 17:

c) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$:

$P_n = \{ 1, 1+1/n, \dots \}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} =$$

Por otro lado $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2$

Regla de Barrow

$= \ln 2$

d) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k/n} =$

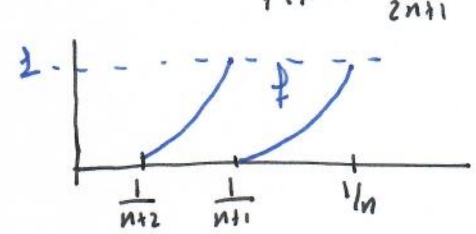
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} =$$

Por otro lado $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = 2/3$

Regla de Barrow

$= 2/3.$

PROBLEMA 18: f es continua en $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ y $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ y $f\left(\frac{1}{n}^-\right) = \lim_{x\to\frac{1}{n}^-} f(x) = 1$. Además, allí $f(x) = \frac{n^2}{2n+1}\left((n+1)^2x^2 - 1\right)$ es creciente.



f es acotada, e integrable en cada $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, por tanto integrable en $\left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$ $\forall n$.

Así existe $\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)$

ver ejercicio 11 hoja anterior

Por tanto tiene sentido hablar de $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$.

F es continua por ser f integrable.

$F(x) = \int_0^{1/(n+1)} f + \int_{\frac{1}{n+1}}^{x} f \Rightarrow F'(x) = f(x)$.

$x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ — f continua en $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$

F no es derivable en $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 2}$ ya que las derivadas no tienen discontinuidades de salto.