TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

1.- Demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de términos $a_n \in [0,1]$ y f es una función integrable en $[0,1]$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{a_n} f$ es absolutamente convergente.

2.- Deriva F, definida sobre $[0,1]$ del siguiente modo:

a)$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt$ b)$F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^3)^{-1} dt$ c)$F(x) = \int_{x^2}^x \sqrt{1-t^2} dt$

d)$F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \cos t$ e)$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt$, con g derivable y f continua.

3.- La derivada de $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2-1} |\frac{\operatorname{sen} s\pi}{s^2+1}| ds$ en el punto $x = 3$ vale:

a) no existe b)3 c)0 d)$\frac{\operatorname{sen}(3^2\pi+1)}{10}$.

4.- Se considera $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$, si $x > 0$ y $F(x) = \cos x$ si $x \leq 0$.

a) Prueba que F es continua en $\mathbb{R}$. b) Demuestra que existe F' si $x \neq 0$.

c) Estudia si F es derivable en $x = 0$. d) Estudia la continuidad de $F'(x)$.

5.- Se consideran las funciones $f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$, $t \neq 0$ y $f(0) = 1$, y $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Prueba que F es derivable en todo $\mathbb{R}$. Cálcula los extremos relativos de F

6.- Sea $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ donde f tiene por gráfica:

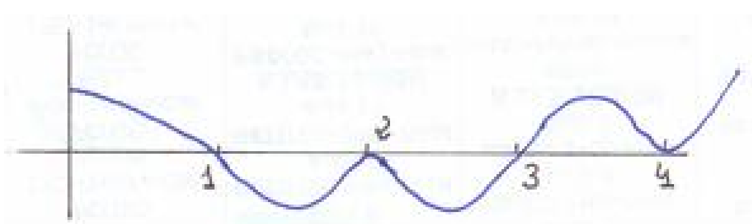

Figura 1:

Entonces es cierto que:

a) F no es continua. b) F no es derivable en 2 y 4.

c) F es creciente. d) F tiene un máximo relativo.

7.- Se considera la función $f(x) = \int_0^x (1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 t))dt$. Demuestra que existe f^{-1} y que esta función inversa es derivable. Calcula $(f^{-1})'(0)$.

8.- Representa la gráfica de la función inversa de la función $f(x) = \int_0^x 1 + e^{-t^2} dt$.

9.- Dada la función $F(x) = \int_0^x -3t^2 + 24t - 45 dt$ ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) F es creciente en $\mathbb{R}$. b) La ecuación $F(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

c) $F(x) < 0$ si $x < 0$. d) F es convexa si $x < 4$.

10.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\int_0^{x^2} e^{1/t}dt}{x^3} =$

11.- Para dos números $a < b$ y para $x \in [a,b]$ se considera la función $G(x) = \int_x^b f(t)dt$, con f continua. ¿Como es $G'(x)$, para $x \in [a,b]$?

12.- Sea al función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Para $x \geq 0$ se consideran las funciones $F(x) = \int_0^x xf(s)ds$ y $G(x) = \int_0^x x^2 f(s)ds$. Comprueba que F y G son derivables y calcula $(F+G)'$.

13.- a) Si f es integrable en $[a,b]$, prueba que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t-c)dt$

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $c > 0$. Si $g(x) = \int_{x-c}^{x+c} f(t)dt$, prueba que g es derivable y calcula su derivada.

14.- Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ derivable, $f(x) \neq 0$ si $x > 0$ y tal que $f^2(x) = 2\int_0^x f$ para todo $x > 0$. Prueba que $f(x) = x$ si $x > 0$.

15.- Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas de modo que $\int_a^b f = \int_a^b g$. Demuestra que existe $c \in [a,b]$ para el cuál $f(c) = g(c)$.

16.- Demuestra que si f es continua, entonces $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x (\int_0^u f(t)dt)du$.

17.- Calcula las integrales siguientes como límites de una suma y calcula los límites siguientes mediante la evaluación de una intregral por la regla de Barrow.

a) $\displaystyle\int_0^1 a^x dx; \qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1), \text{ con } a > 0.$

b) $\displaystyle\int_1^2 \ln x dx; \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+1/n)(1+2/n).....(1+n/n)}.$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} dx; \qquad \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}).$

d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} dx; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$

18.- Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y

$$f(x) = \frac{n^2}{2n+1}[(n+1)x - 1][(n+1)x + 1] \quad \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Estudia si f es integrable en $[0,1]$. Después estudia la continuidad y derivabilidad de $F(x) = \int_0^x f(s)ds$.