FUNCIONES ELEMENTALES. LA EXPONENCIAL

PROBLEMA 1: a) $f(x) = e^{e^x}$ $f'(x) = e^{e^x} \cdot e^x$

APLICANDO LA REGLA DE LA CADENA

c) $f(x) = e^{\int_0^x e^{-t^2} dt}$ $f'(t) = e^{\int_0^x e^{-t^2} dt} \cdot e^{-x^2}$.

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x})})$ PARA QUE TENGA SENTIDO LA EXPONENCIAL $x > 0$, Y PARA QUE TENGA SENTIDO ESTA EXPRESIÓN

USANDO QUE $x^a = e^{a \ln x}$ $(x^a)' = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = a x^{a-1}$

Y $b^x = e^{x \ln b}$ $(b^x)' = e^{x \ln b} \ln b = \ln b \cdot b^x$

$$f'(x) = \cos(x^{\operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x})}) \cdot x^{\operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x})} \Big[\frac{1}{x} \operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x}) + \ln x \Big[\cos(x^{\operatorname{sen} x}) \cdot x^{\operatorname{sen} x} \big[\ln x \cos x + \frac{1}{x} \operatorname{sen} x \big] \Big] \Big].$$

e) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$ PARA $x > 1$

$f(x) = e^{(\ln x) \ln(\ln x)}$. ASÍ

$$f'(x) = e^{\ln(x) \ln(\ln x)} \{ \ln x \cdot \ln[\ln x] \}' =$$

$$= (\ln x)^{\ln x} \Big[\frac{1}{x} \ln(\ln x) + \cancel{\ln x} \frac{1}{\cancel{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} \Big] =$$

$$= \frac{(\ln x)^{\ln x}}{x} [\ln(\ln x) + 1].$$

f) $f(x) = \log_{e^x}(\operatorname{sen} x) = \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln e^x} = \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x}$

$$f'(x) = \frac{x \left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right] - \ln(\operatorname{sen} x)}{x^2}.$$

FUNCIONES ELEMENTALES. LA EXPONENCIAL.

PROBLEMA 2:

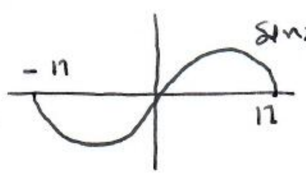
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=}$$

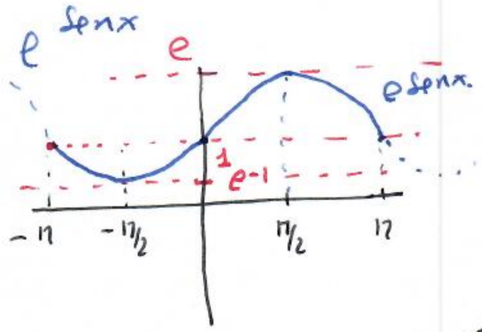
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}}{3x^2} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + 1 - x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3} - 1}{6} = 1/6$$

PROBLEMA 3:

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$





PROBLEMA 4:

a)

$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

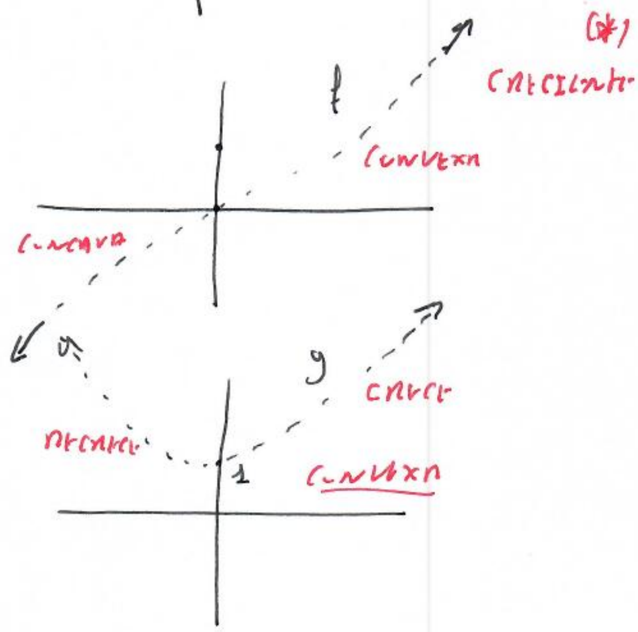
IMPAR

$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{senh} x = -\infty$

$\lim_{x\to \infty} \operatorname{senh} x = \infty$

$g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

PAR



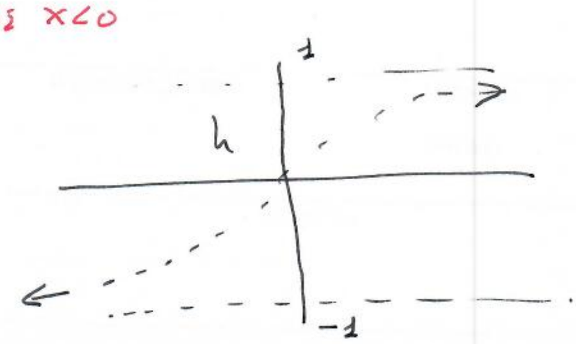
(*) $\begin{cases} f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x > 0 \\ g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$

$h(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

IMPAR

$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$



LA EXPONENCIAL

PROBLEMA 4 :] b)

1) $\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x} - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$

$= 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{\frac{e^x}{e^{-x}} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$

2) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4} = 1$

3) $\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = \tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} \underset{2)}{=} \tanh^2 x + \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x}$

$= \cancel{\tanh^2 x} + 1 - \cancel{\tanh^2 x} = 1$

4) $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$ 5) $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$

6) $(\tanh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} =$

$= 1 - \tanh^2 x \underset{3)}{=} \frac{1}{\cosh^2 x}.$

7:) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

DEM LA PRUEBA ES ANÁLOGA AL CASO $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos y \operatorname{sen} x$

1:] $\operatorname{senh} x$ SATISFACE $f'' - f = 0$

2:] $\left.\begin{array}{l} f'' - f = 0 \\ f(0) = a \\ f'(0) = b \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = b \operatorname{senh} x + a \cosh x$

DEM $\left.\begin{array}{l} g(x) = f(x) - b \operatorname{senh} x - a \cosh x \\ g'(x) = f'(x) - b \cosh x - a \operatorname{senh} x \\ g''(x) = f''(x) - b \operatorname{senh} x - a \cosh x \end{array}\right\}$ ASÍ $g(x) - g''(x) = f(x) - f''(x) = 0$

AHORA $0 = f(x) - f''(x) = f'(x) f(x) - f'(x) f''(x) = 2f'f + 2f'f'' = (f'^2 + f^2)'$

$\Rightarrow f^2 + f'^2 \overset{f - f'' = 0}{=} k$ SI $f(0) = f'(0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$

COMO $g(0) = f(0) - a = 0$ Y $g'(0) = f'(0) - b = 0$

SE SIGUE QUE $g \equiv 0$.

3:] $f(x) = \operatorname{senh}(x+y)$ VERIFICA $f'' - f = 0$ Y $f(0) = \operatorname{senh} y$ Y $f'(0) = \cosh y$ $\Rightarrow \operatorname{senh}(x+y) = \cosh y \operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y \cosh x$

LA EXPONENCIAL

PROBLEMA 4:

g) ANÁLOGO A f) Y DEL MISMO TIPO QUE

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

c) – $\operatorname{senh} x$ es una función creciente y es continua por tanto inyectiva

– Del mismo modo $\cosh\ [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$ continua e inyectiva (ver parte a))

d) 3) $\operatorname{senh}(\cosh^{-1} x) \underset{b)\,2)}{=} \sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1} = \sqrt{x^2-1}$

2) $(\operatorname{senh}^{-1})'(x) \underset{\text{T. función inversa}}{=} \dfrac{1}{\operatorname{senh}'(\operatorname{senh}^{-1}(x))} =$

$= \dfrac{1}{\cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x))} \underset{d)\,1)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1) $\cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x)) \underset{b)\,2)}{=} \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(\operatorname{senh}^{-1} x)} = \sqrt{1+x^2}$

4) como 2)

e) $\boxed{(\operatorname{senh}^{-1})' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{senh}^{-1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt}$

$(\cosh^{-1})' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \cosh^{-1}(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$

Otra forma: $\tanh \operatorname{senh}^{-1}(x) = \dfrac{x}{\cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x))} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

y $\tanh \cosh^{-1}(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(\cosh^{-1}(x))}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Por el ejercicio 7 (más adelante) $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\boxed{\operatorname{senh}^{-1}(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)}.$

y $\cosh^{-1}(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2-1}/x}{1-\sqrt{x^2-1}/x}\right).$

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

PROBLEMA 5:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1} & \text{SI } x>0 \text{ y } x\neq 1 \\ 1 & \text{SI } x=1 \\ 0 & \text{SI } x\leq 0 \end{cases}$$

LÍMITES:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln x}{x-1} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x+1}{1} = 1$$

LA FUNCIÓN ES CONTINUA EN $x=1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1}\,\frac{\ln x}{1/x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

LA FUNCIÓN ES CONTINUA EN $x=0$

DERIVADA SI $x>0$, $x\neq 1$

$$f'(x) = \frac{(\cancel{x}-1)[\ln x+1] - \cancel{x}\ln x}{(x-1)^2} = \frac{-\ln x+x-1}{x-1}$$

SI $x<0$

$$f'(x)=0$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$

$\cdot)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0$

$\cdot\cdot)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x\ln x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x-1} = \infty$

f NO ES DERIVABLE EN CERO

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x\ln x}{x-1}-1}{x-1} =$$

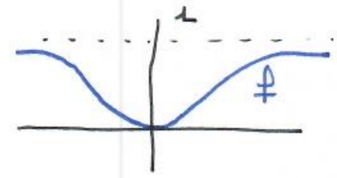
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x+1}{(x-1)^2} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x \cancel{+1} \cancel{-1}}{2(x-1)} =$$

$$\underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2}$$

f ES DERIVABLE EN $x=1$.

LA EXPONENCIAL

PROBLEMA 6: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



a)

– $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x\, e^{\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x \, \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2}} = 0$$

$$\left(\lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{e^y} = 0. \right)$$

Además $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} 2x \, \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{1/x^2}} = 0$

$$\left(\lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{e^y} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{2y}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{2}{e^y} = 0 \right)$$

Luego existe f' y es continua en todo $\mathbb{R}$.

– $f''(x) = \frac{-6}{x^4} e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6} e^{-1/x^2}$

Por otro lado

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2 \, \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{e^{1/x^2}} = 0$$

como hemos visto antes.

b) OBSERVACIÓN para todo polinomio P, se sigue que $\displaystyle \lim_{x\to 0} e^{-1/x} \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

DEM $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{P\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{-1/x}} = \lim_{y\to\infty} \frac{P(y)}{e^y} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \dots = 0.$

– Supongamos (hipótesis inducción) que $f^{(n-1)}(x) = e^{-1/x^2} P_{n-1}(1/x)$ $x \neq 0$, y $f^{(n-1)}(0) = 0$ para P_{n-1} cierto polinomio

Así $\displaystyle f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$

ya que $\frac{1}{x} P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) = Q\left(\frac{1}{x}\right)$ donde Q es otro polinomio.

LA EXPONENCIAL

PROBLEMA 7:

a) $(\tanh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(\tanh)'(\tanh^{-1}x)} =$

TH FUNCIÓN INVERSA

$= \dfrac{1}{1-\tanh^2(\tanh^{-1}x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$

PROBLEMA 4 b) 3).

b) ¿ $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$?

$\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$

SEA $y = \tanh(x) = \dfrac{A - \frac{1}{A}}{A + \frac{1}{A}}$, $A = e^x$ $\iff y\left(A + \frac{1}{A}\right) = A - \frac{1}{A}$

$\iff A(y-1) = \frac{1}{A}(-y-1)$

$\iff A^2(1-y) = 1+y$ LUEGO $A = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$

$A = e^x = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$ LUEGO $x = \tanh^{-1}y =$

$= \ln\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}} =$

$= \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$.

c) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{1-x^2} = \int_a^b (\tanh^{-1})'(x)\,dx =$

$= \tanh^{-1}(x)\Big|_a^b = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Big|_a^b =$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\dfrac{1+b}{1-b} - \ln\dfrac{1+a}{1-a}\right] = \frac{1}{2}\ln\dfrac{(1+b)(1-a)}{(1-b)(1+a)}$

PROBLEMA 8: $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int_a^b \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx =$

$= \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\right)\Big|_a^b = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\Big|_a^b$

SALE LO MISMO QUE EN 7) c).

LA EXPONENCIAL

PROBLEMA 9: ¿ $\frac{e^x}{x^n} > \frac{e^n}{n^n}$ si $x>n$?

SEA $f(x)=\frac{e^x}{x^n}$; $f'(x)=\frac{e^x x^n - n x^{n-1} e^x}{x^{2n}} =$

$$= \frac{e^x x^{n-1}[x-n]}{x^{2n}} > 0 \quad \text{SI } x>n.$$

LUEGO f CRECE PARA $x>n$.

ASÍ $f(x)-f(n) = f'(\xi)(x-n) > 0$, $\xi \in (n,x)$

LUEGO $\frac{e^x}{x^n} - \frac{e^n}{n^n} > 0 \quad \forall x>n.$

PROBLEMA 10: $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$

ASÍ $|f'(x)| = \frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x \geq 1$

LUEGO POR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

SI $x,y \in [1,\infty) \Rightarrow \boxed{|f(x)-f(y)| = f'(\xi)|x-y| \leq |x-y|}$, $\xi \in (x,y)$

Es Lipschitz y por tanto uniformemente continua.

EN CAMBIO SI $\frac{1}{e^n}, \frac{1}{e^{n+1}} \downarrow 0$ SE TIENE QUE

$$\left|\ln \frac{1}{e^{n+1}} - \ln\frac{1}{e^n}\right| = \left|\ln \frac{e^n}{e^{n+1}}\right| = \left|\ln\frac{1}{e}\right| = 1$$

AUNQUE $\left|\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

PROBLEMA 11: $e^{\frac{-1}{(1-x^2)^2}} = \frac{1}{4}$

$(\Leftrightarrow) \quad \frac{-1}{(1-x^2)^2} = \ln\frac{1}{4} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{1}{(1-x^2)^2} = \ln 4 > 0$

ASÍ $1-x^2 = \frac{1}{\sqrt{\ln 4}} \quad (\Leftrightarrow) \quad 1-\frac{1}{\sqrt{\ln 4}} = x^2$

Observemos que $1-\frac{1}{\sqrt{\ln 4}} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{\ln 4}}}.$

LA EXPONENCIAL

PROBLEMA 12:) $f(x) = \ln|x|$, $x \neq 0$

Así $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sig} x}{|x|} = \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = \begin{cases} \ln -x & \text{si } x<0 \\ \ln x & \text{si } x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>0. \end{cases}$$

PROBLEMA 13:) $f' = c f$

Sea $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{cx}}$ así

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^{cx} - f(x)\,c e^{cx}}{e^{2cx}} = \frac{c f(x) e^{cx} - f(x) c e^{cx}}{e^{2cx}} = 0$$

De lo que se sigue que $g(x) \equiv k \in \mathbb{R}$

Así $f(x) = k e^{cx}$.

PROBLEMA 14:) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

Sea $\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = x \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$.

Tomando límites

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{1/x} =$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}} \cdot a \cdot \cancel{\frac{-1}{x^2}}}{\cancel{-1/x^2}} = a$$

Como el $\ln$ es una función inyectiva y continua

si $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to\infty]{} y \Rightarrow \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln y = a$

Así $y = e^a$. Si $\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = a$.

O dicho de otra manera: como e^x es continua $\lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

— · —

$x\left(b^{1/x} - 1\right) = x\left(e^{\frac{1}{x}\ln b} - 1\right) = \dfrac{e^{1/x \ln b} - 1}{1/x}$ así

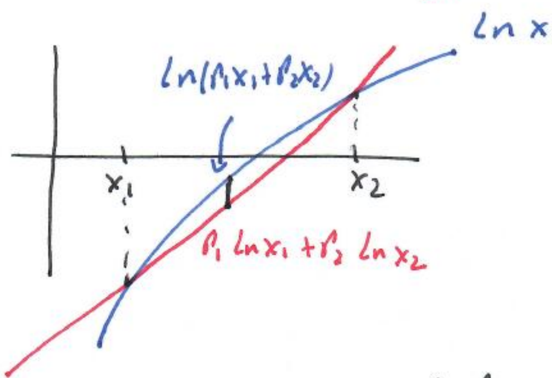
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x \ln b} - 1}{1/x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}\ln b\, e^{1/x \ln b}}{-1/\cancel{x^2}} = \ln b.$$

LA EXPONENCIAL

PROBLEMA 15: a) $\ln x$ ES UNA FUNCIÓN CÓNCAVA

$$\left((\ln x)'' = \frac{-1}{x^2} < 0 \right)$$

ASÍ



ASÍ $p_1 \ln x_1 + p_2 \ln x_2 = \ln x_1^{p_1} x_2^{p_2} \leq \ln(p_1x_1 + p_2x_2)$

COMO $\ln x$ ES CRECIENTE

$$\boxed{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \leq p_1 x_1 + p_2 x_2}$$

AHORA PROCEDEMOS POR INDUCCIÓN

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \quad x_n^{p_n} =$$

$$\left(x_1^{\frac{p_1}{1-p_n}} x_2^{\frac{p_2}{1-p_n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{p_{n-1}}{1-p_n}} \right)^{1-p_n} x_n^{p_n} \leq$$

$1-p_n+p_n=1$

$$\leq (1-p_n)\left[x_1^{\frac{p_1}{1-p_n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{p_{n-1}}{1-p_n}} \right] + p_n x^{p_n} \leq$$

APLICANDO LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

$$\leq 1-p_n \left[\frac{p_1}{1-p_n} x_1 + \quad + \frac{p_{n-1}}{1-p_n} x_{n-1} \right] + p_n x^{p_n} =$$

$$= p_1 x_1 + \cdots \quad p_{n-1} x_{n-1} + p_n x^{p_n}.$$

b) TOMANDO $p_i = \frac{1}{n}$ $\forall i = 1 \ldots n$. Y APLICANDO a)
TENEMOS EL RESULTADO

LA EXPONENCIAL

PROBLEMA 16:) MIRA EL EJERCICIO 4:) b) 7)

a) $f'' - f = 0$ por hipótesis, así

$2f'f'' - 2f'f = 0 \iff (f'^2 - f^2)' = 0$

Luego $f'^2 - f^2 \equiv k$ como $f(0) = f'(0) = 0 \Rightarrow k = 0$

Luego $f'^2 - f^2 = 0$

b) $f'^2 - f^2 = (f' + f)(f' - f) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} f' - f = 0 & \Rightarrow \quad f(x) = ce^{x} \\ f' + f = 0 & \Rightarrow \quad f(x) = ce^{-x} \end{cases}$ ejer 13 $\quad c \in \mathbb{R}$

c) $f(0) = 0$ y $f(x_0) \neq 0$, sea

$A = \{x \in [0, x_0) : f(x) = 0\}$

A es no vacío, y x_0 acota A, luego

$\exists\, a = \sup A < x_0$. Por continuidad $f(a) = 0$

y $f(x) \neq 0$ para $x > a$, por definición de a.

d) Por b) sabemos que $f(x) = ce^{x}$ o ce^{-x}

Como $f(0) = f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

PROBLEMA 17:) IGUAL QUE LE EJERCICIO 4:) b) 7)

Si $f'' - f = 0 \Rightarrow f(x) = ae^{x} + be^{-x}$. $a, b \in \mathbb{R}$

Ahora $f(x) = A \cosh x + B \operatorname{senh} x =$

$= A \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} + B \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} =$

$= \dfrac{A+B}{2} e^{x} + \dfrac{A-B}{2} e^{-x}$

Por tanto $\dfrac{A+B}{2} = a$

$\dfrac{A-B}{2} = b$

SISTEMA 2×2 (orden 2).

Comprobar que $A = f(0)$ y $B = f'(0)$

LA EXPONENCIAL

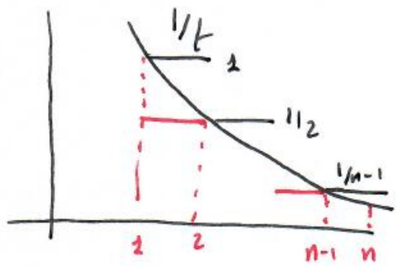
PROBLEMA 18: $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n = C.$

VAMOS A VER QUE LA SUCESIÓN

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n\right)_{n=1}^{\infty}$$

ESTÁ ACOTADA Y ES DECRECIENTE; POR TANTO TIENE LÍMITE

1: $x_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n - \ln n$ ACOTADA



$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \quad , \text{ ASÍ}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} \le \ln n \le 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}$$

LUEGO $-\left(1/2 + 1/3 + \dots + \frac{1}{n}\right) \geq -\ln n \geq -\left(1+1/2+\dots+\frac{1}{n-1}\right)$

ASÍ $0 < \frac{1}{n} \le x_n \le 1$ PARA TODO n.

2: $x_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n - \ln x$ ES DECRECIENTE

VEAMOS $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln (n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1}$

$$= \frac{1}{n+1}\left[1 + \frac{\ln \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right]$$

CONSIDERAMOS $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1}$.

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1} = 0$

b) $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}\left[-1 + \frac{x+1}{x}\right] = \frac{1}{(x+1)^2}\,\frac{1}{x} > 0 \quad \forall x>0$$

ASÍ f ES CRECIENTE PARA $x>0$ Y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

LUEGO SE SIGUE QUE $\frac{1}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1} < 0 \quad \forall x \geq x_0$

EN PARTICULAR

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} < 0 \quad \text{PARA } n \geq n_0 > x_0$$

Y ASÍ $\underline{x_{n+1} < x_n}$