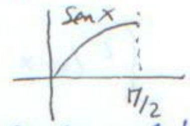
AVR PRÁCTICA-10

Nombre y apellidos...

1.- Se considera la función $f(x) = \int_0^x (1 + \mathrm{sen}(\mathrm{sen}^2 t))dt$. Demuestra que existe f^{-1} y que esta función inversa es derivable. Calcula $(f^{-1})'(0)$.

$\mathrm{sen}^2 t \in [0,1]$ $\forall t \in \mathbb{R}$; así $1 + \mathrm{sen}(\mathrm{sen}^2 t) \geq 1 > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ya que

$[0,1] \subseteq [0, \pi/2]$



Por ser $1 + \mathrm{sen}(\mathrm{sen}^2 t)$ continua, f es derivable con

$f'(x) = 1 + \mathrm{sen}(\mathrm{sen}^2 x) > 1$; luego f es estrictamente creciente

por tanto inyectiva y existe f^{-1}. Como $f'(x) \neq 0$ $\forall x$.

Por el teorema de la función inversa existe

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$ como $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$ y

Ahora $$\boxed{(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{1 + \mathrm{sen}(\mathrm{sen}^2 0)} = \frac{1}{1} = 1}$$

2.- Representa la gráfica de la función $F(x) = \int_0^x -3t^2 + 24t - 45dt$.

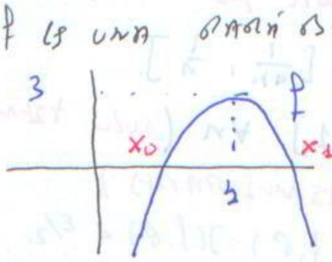
$f(t) = -3t^2 + 24t - 45$

$f'(t) = -6t + 24 = 0 \iff t = 4$

$f(4) = -3 \times 16 + 24 \times 4 - 45 =$

$= -48 + 96 - 45 = 3 > 0$

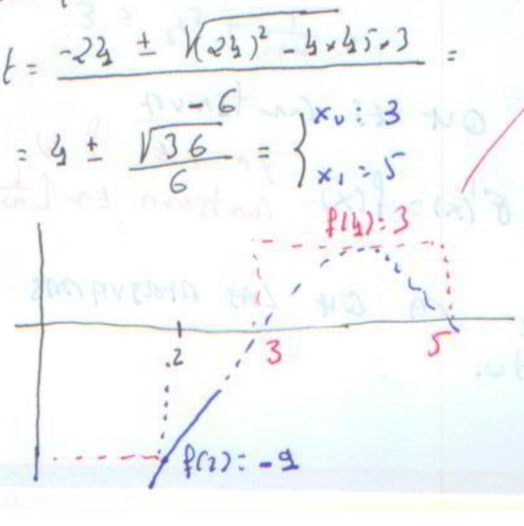
f es una parábola



$0 = f(t) = -3t^2 + 24t - 45$

$$t = \frac{-24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4 \times 45 \times 3}}{-6} =$$

$$= 4 \pm \frac{\sqrt{36}}{6} = \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$



$F(x) = \int_0^x -3t^2 + 24t - 45\, dt$

$F(0) = 0$; si $x < 0$ $F(x) = -\int_x^0 -3t^2 + 24t - 45\, dt > 0$

$$F'(x) = -3x^2 + 24x - 45 \begin{cases} < 0 & \text{si } x < x_0 \\ > 0 & \text{si } x \in (x_0, x_1) \\ < 0 & \text{si } x > x_1 \end{cases}$$

Luego F decrece en $(-\infty, x_0)$

x_0 mínimo local

F crece en (x_0, x_1)

x_1 máximo local

F decrece en (x_1, ∞)

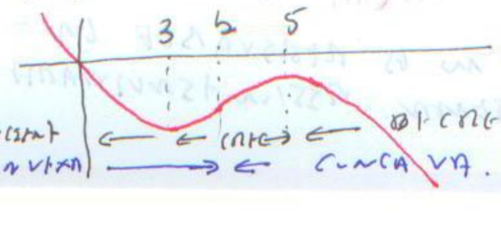
$F(5) \leq 3 \times 2 - 2 \times 9 < 0$

$$F''(x) = -6x + 24 \begin{cases} > 0 & \text{si } t < 4 \\ < 0 & \text{si } t > 4 \end{cases}$$

Luego F convexa si $x < 4$

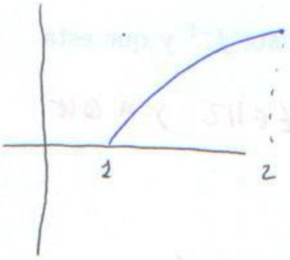
$x = 4$ punto de inflexión

F cóncava si $x > 4$



3.- Calcula la integral siguiente como límite de una suma y calcula el límite siguiente mediante la evaluación de una intregral por la regla de Barrow.

$$\int_1^2 \ln x dx; \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+1/n)(1+2/n).....(1+n/n)}.$$



Para la partición $\{1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \dots, 1+\frac{k}{n}, \dots, 1+\frac{n}{n}=2\}$

por ser $\ln x$ continua se tiene que

$$\int_1^2 \ln x \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{(1+\tfrac{1}{n})(1+\tfrac{2}{n})\cdots(1+\tfrac{n}{n})}\right).$$

Por otro lado $\int_1^2 \ln x \, dx \underset{\text{partes}}{=} x\ln x\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = \ln 4 - 1$

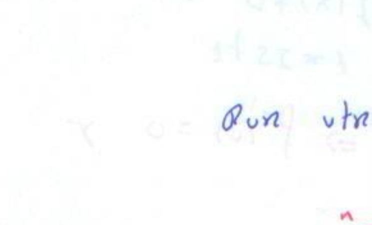
$= \ln 4 - \ln e = \ln\frac{4}{e}.$

Si $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}\right) = \ln\frac{4}{e} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})} = \frac{4}{e}.$

4.-a) Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función definida por $f(0)=0$, $f(1)=1$ y

$$f(x)=\frac{n^2}{2n+1}[(n+1)x-1][(n+1)x+1] \quad \text{si} \quad \frac{1}{n+1}\le x<\frac{1}{n} \quad \text{para} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Estudia si f es integrable en $[0,1]$. Después estudia la continuidad y derivabilidad de $F(x)=\int_0^x f(s)ds$.



$f(\frac{1}{n+1})=0$ y $\lim_{x\to\frac{1}{n}^-} f(x) = \frac{n^2}{2n+1}\left[\frac{n+1}{n}-1\right]\left[\frac{n+1}{n}+1\right] = 1$ f continua en $(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$

$f(x)=\frac{n^2}{2n+1}\left((n+1)^2x^2-1\right)$ creciente en $x\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$.

f acotada e integrable en $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$.

Por tanto integrable en $[\frac{1}{n+1},1]$ $\forall n$ (solo tiene una cantidad finita de discontinuidades).

Así sea $\varepsilon>0$ y $P\in\mathcal{P}([\frac{1}{n+1},1])$ con $S(f,P)-I(f,P)<\varepsilon/2$.
$\frac{1}{n+1}<\varepsilon/2$

Sea $P'=\{0\}\cup P$ $\quad S(f,P')-I(f,P')\le\frac{1}{n+1}+S(f,P)-I(f,P)\le$

$\le\frac{1}{n+1}+\varepsilon/2\le\varepsilon.$

Luego f es integrable.

Por el mismo argumento $F(x)=\int_0^x f(s)ds$ que es continua

y $F(x)=\int_0^{1/(n+1)} f+\int_{\frac{1}{n+1}}^{x} f \Rightarrow F'(x)=f(x)$ ya que f es continua en $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$
$x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$

F no es derivable en $(\frac{1}{n})_{n\ge2}$ ya que las derivadas no tienen discontinuidades de salto.