AVR PRÁCTICA-4

Nombre y apellidos..

1.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$1)\sqrt{x} \qquad 2)\ln|x| \qquad 3)\operatorname{sen}(\cos^2 x) \qquad 4)\ln\left(e^x+\sqrt{x^2+\frac{3}{\operatorname{sen} x}}\right)$$

$- f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$- f(x) = \ln|x| =$ |x| no es derivable en x=0, tampoco está definido el logaritmo en x=0

$$= \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{-1}{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x}$$

$- f(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x) \qquad f'(x) = \cos(\cos^2 x)\left[2\cos x\,(-\operatorname{sen} x)\right] =$

$= -2\cos x \operatorname{sen} x \cos(\cos^2 x)$

$- f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{x^2+\frac{3}{\operatorname{sen} x}}\right) \qquad f'(x) = \frac{1}{e^x+\sqrt{x^2+\frac{3}{\operatorname{sen} x}}}\left[e^x + \frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{3}{\operatorname{sen} x}}}\left(2x + \frac{-3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)\right].$

2.- Sean f y g dos funciones derivables en a de modo que $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$. Prueba que h definida por

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq a \\ f(x) & \text{si } x \geq a \end{cases},$$

es derivable en a. Justifica por que es necesario que $f'(a) = g'(a)$.

$$h'(a) = \lim_{\delta \to 0} \frac{h(a+\delta) - h(a)}{\delta} = \begin{cases} \lim_{\delta \to 0^+} \frac{h(a+\delta)-h(a)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} \underset{(\bullet)}{=} f'(a) \\ \lim_{\delta \to 0^-} \frac{h(a+\delta)-h(a)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0^-} \frac{g(a+\delta)-g(a)}{\delta} \underset{(\bullet)}{=} g'(a) \end{cases}$$

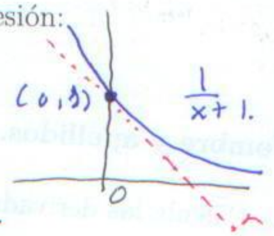
(•) para que f y g son derivables, y por tanto existen tales límites

como $f'(a) = g'(a)$, los límites laterales existen y son iguales; por lo tanto existe

$h'(a) = f'(a) = g'(a)$.

3.- (**Indicación:** piensa en la tangente). Justifica la siguiente expresión:

$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad \text{si} \quad x \approx 0$



$$f(x) = \frac{1}{1+x} \; ; \; f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h + h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1+h}$$

$= -1$. ASÍ LA RECTA TANGENTE A f EN $(0,1)$ ES

$y = -(x-0) + 1 = 1 - x$ ESTA RECTA ESTÁ PRÓXIMA A LA GRÁFICA DE f SI x ESTÁ CERCA DE 0

4.- Prueba que si f es derivable en a, entonces

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Comprueba que la existencia del límite anterior no es suficiente para que f sea derivable en a.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{2h} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right) =$$

SI $\sigma = -h$

SI $h \to 0 \Rightarrow \sigma \to 0$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{\sigma \to 0} \frac{f(a+\sigma) - f(a)}{\sigma} \right) =$$

COMO EXISTEN AMBOS LÍMITES

$$= \frac{1}{2} \left(f'(a) + f'(a) \right) = f'(a)$$

EJEMPLO SEA $f(x) = |x|$ Y $a = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0 \; ;$$

SIN EMBARGO SABEMOS QUE $f(x) = |x|$ NO ES DERIVABLE EN $a = 0$.