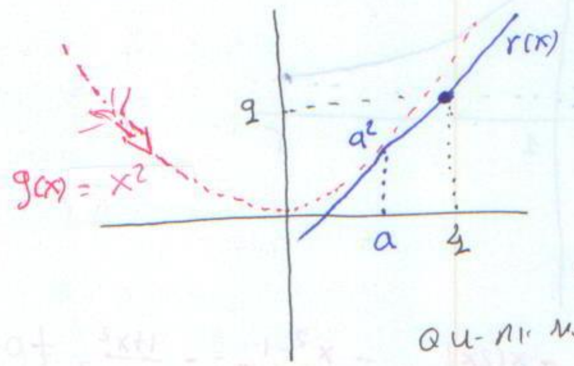
AVR PRÁCTICA-5

Nombre y apellidos...

1.- Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de una curva $y = x^2$. Al desconectar el cohete viajará a lo largo de la tangente a la curva en el punto de desconexión. ¿En que punto deberá parar el motor para alcanzar el punto $(4, 9)$?¿Y para llegar al $(4, -9)$?



LA TRAYECTORIA ES LA GRÁFICA DE $y(x)=x^2$

$g'(x)=2x$. LA RECTA TANGENTE POR EL PUNTO (a,a^2) ES

$r(x) = 2a(x-a)+a^2$ Y PASA POR (a,a^2). Y POR $(4,9)$.

QUEREMOS QUE r PASE POR

LUEGO $9 = r(4) = 2a(4-a)+a^2 = a(8-2a+a) =$

$= a(8-a)$.

LA ECUACIÓN $9 = 8a - a^2 \iff a^2-8a+9=0$, Y TIENE POR

SOLUCIÓN $a = \dfrac{8\pm\sqrt{64-36}}{2} = 4\pm\sqrt{7}$

LA SOLUCIÓN SOLO PUEDE SER $(4-\sqrt{7}, (4-\sqrt{7})^2)$

OBSERVEMOS $4-\sqrt{7}$ 4 $4+\sqrt{7}$

2.- Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^4 + x^4 \operatorname{sen}^2(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Prueba que f tiene un mínimo relativo estricto en $x = 0$, aunque su derivada toma valores positivos y negativos en cualquier entorno de 0 (tanto a su derecha compo a su izquierda).

$f(x) = 2x^4 + x^4\operatorname{sen}^2(1/x) \geq 0 \quad \forall x$; COMO $f(0)=0$, $x=0$ ES UN MÍNIMO ABSOLUTO Y POR TANTO UN MÍNIMO LOCAL.

COMO $f(x)>0$, SI $x\neq 0$, ES UN MÍNIMO ESTRICTO.

AHORA $f'(x) = 8x^3 + 4x^3\operatorname{sen}^2 1/x + x^4\left(\frac{-1}{x^2}\right)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

$= 2x^2\left[4x + 2x\operatorname{sen}^2\frac{1}{x} - \operatorname{sen}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)$

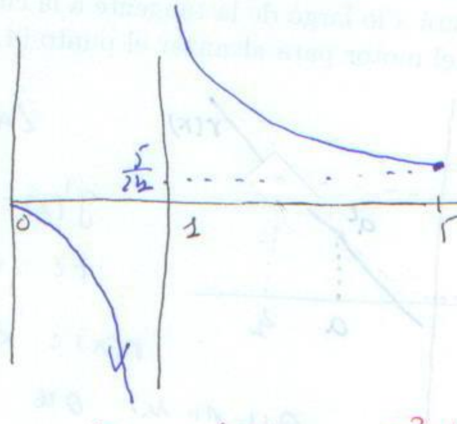
$= \underset{\underset{0}{\vee|}}{2x^2}\left[\underbrace{2x(2+\operatorname{sen}^2(1/x))}_{\text{PEQUEÑO SI } x\simeq 0} - \underbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}_{\underset{\pm 1/2}{\shortparallel}}\right]$ SI $x = \dfrac{1}{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ $k\in\mathbb{Z}$.

LUEGO EL SIGNO DE LA DERIVADA OSCILA CUANDO x SE ACERCA A CERO (POR LA DERECHA O POR LA IZQUIERDA).

3.- Halla los máximos y mínimos absolutos y relativos, si existen de la función siguiente. Después dibuja su gráfica indicando los máximos y mínimos locales:

$$\text{c)}\, f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad \text{en} \quad [0,5].$$

$\operatorname{Dom} f = [0,5] \setminus \{1\}.$



$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \frac{5}{24}$

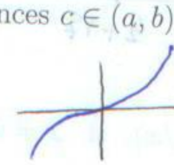
$$f'(x) = \frac{x^2-1-x(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \neq 0$$

para todo x.

f, tiene una asíntota vertical, que me dice que no hay máximo ni mínimo absoluto. O máximo local, o mínimo local ya que $f'(x)\neq 0$, luego en $(0,1)$ ni en $(1,5)$ puede haber puntos del tipo ⌒ ∪ ( ) ¡su derivada sería nula!

4.- Sea una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Entonces $c\in(a,b)$ es un mínimo local de f si:

a $f'(c)=0$.



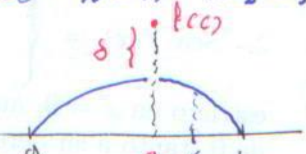
$x^5 = f(x)$ $\quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$

y $x=0$ no es mínimo

b $f'(c)=0$ y f"(c)=0.

c Existe $\delta>0$ de modo que para todo $r\in(a,b)\setminus\{c\}$ se tiene que

$$|f(r)-f(c)|>\delta.$$



c no es mínimo

d Existe $\delta>0$ de modo que para todo $r\in(a,b)\setminus\{c\}$ se tiene que

$$f(r)-\delta>f(c).$$

Justifica tu respuesta.

$$f(r)-\delta > f(c) \Rightarrow f(r) > f(c)+\delta > f(c)$$

$\delta>0$

Luego para todo $r\in(a,b)-\{c\}$, $f(r)>f(c)$, luego c es un mínimo absoluto de f en (a,b), y por tanto un mínimo local.