AVR PRÁCTICA-6

Nombre y apellidos...

1.- De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que es derivable en todo $\mathbb{R}$, que $f(0)=0$, f'(0)=7 y que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$. Determina si existe $x_0, y_0\in\mathbb{R}$ para los cuáles

$$f(x_0)-f(y_0)=36(x_0-y_0).$$

(**Indicación: No** se usa el Teorema del Valor Medio). Consideramos la función

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $x\neq 0$ y $g(0)=7$ como $7=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

g es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Además $g(0)=7$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, luego por el teorema de Bolzano $\exists\, x_0\in(0,\infty)$ con $g(x_0)=36=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$. Tomando $y_0=0 \Rightarrow f(x_0)-f(y_0)=36x_0$

2.- Si f es derivable en $[0,\infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)=A$, calcula:
a) $\lim_{x\to\infty} f(x+1)-f(x)$ b) Demuestra que $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}=0$.
(**Indicación:** Usa el Teorema de Valor Medio).

a) Por el teorema del valor medio $\exists\, r\in(x,x+1)$ con

$f(x+1)-f(x)=f'(r)(x+1-x)=f'(r)$

Si $x\to\infty$ $x<r<x+1 \Rightarrow r\to\infty$

Luego $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+1)-f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f'(r)=\lim\limits_{r\to\infty} f'(r)=A$.

b) Sea $f(x)=\sqrt[3]{x}$; $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0 \overset{a)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}=0$.

3.- Demuestra que $1/9\le\sqrt{66}-8\le 1/8$.

Sea $f(x)=\sqrt{x}$ $x\in[64,66]$. Por el teorema del valor medio existe $r\in(64,66)$ tal que

$\sqrt{66}-\sqrt{64}=\sqrt{66}-8=f'(r)(66-64)=\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{r}}\cancel{2}\underset{64<r}{\le}\dfrac{1}{\sqrt{64}}=\dfrac{1}{8}$.

Por otro lado $\sqrt{66}-8=\dfrac{1}{\sqrt{r}}\underset{r\le 66}{\ge}\dfrac{1}{\sqrt{66}}>\dfrac{1}{\sqrt{81}}=\dfrac{1}{9}$.

4.- Dadas dos funciones $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $(a,b)\backslash\{x_0\}$, tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)\backslash\{x_0\}$. Si existe $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, prueba que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

VAMOS A CALCULAR $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, EL LÍMITE POR LA IZQUIERDA SE CALCULA IGUAL.

$x_0 \quad r \quad x \quad S$

PARA $S > x_0$, $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (x_0, S)$, DE OTRO MODO EL TEOREMA DE ROLLE NOS DICE QUE g' SE ANULA Y NO ES EL CASO.

AHORA POR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY (f, g CONTINUAS EN $[x_0, S]$ Y DERIVABLES EN (x_0, S)) PARA x_0 Y x EXISTE $r \in (x_0, x)$ CON

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(r)}{g'(r)}.$$

AHORA SI $x \to x_0$, ENTONCES $r \to x_0$ Y

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(r)}{g'(r)} = \lim_{r\to x_0} \frac{f'(r)}{g'(r)} = \infty$$

POR HIPÓTESIS

(HEMOS USADO LA MISMA PRUEBA QUE EN LA DE LA REGLA DE L'HÔPITAL.

5.- Calcula $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(\ln x)(x-1)} \overset{0/0}{\underset{\text{L'HÔPITAL}}{=}} \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)+x\ln x}$$

$$\overset{0/0}{\underset{\text{L'HÔPITAL}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\ln x+1} = 1/2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1-\ln x}{\ln x\,(x-1)} = \dots = 1/2$$

LUEGO EL LÍMITE ES $1/2$