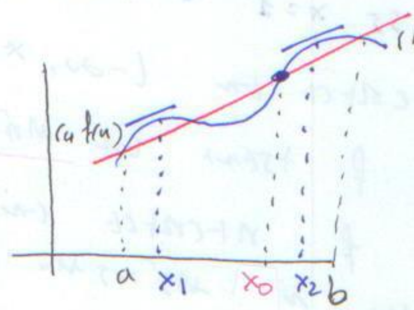
AVR PRÁCTICA-7

Nombre y apellidos..

1.- Sea f continua en $[a,b]$ y con derivada segunda en (a,b). Se supone que en el segmento que une los extremos de la gráfica de f hay algún punto de ella. Demuestra que existe $c \in (a,b)$ con $f''(c)=0$. (**Indicación:** El Teorema del Valor Medio siempre es útil)



$r(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

por hipótesis $r(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a)+f(a)$

$= f(x_0) \Longrightarrow$

$\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$; pero también que

$r(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b) \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

Si $f''(x)>0 \Rightarrow f'$ es estrictamente creciente. Por tanto $x_1<x_2$

por otro lado $\exists\, x_1 \in (a,x_0)$ y $\exists\, x_2 \in (x_0,b)$ (por el teorema del valor medio)

tal que $f'(x_1) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_2)$ luego f' no es estric. creciente.

Si $f''(x)<0 \Rightarrow f'$ es estric. decreciente; pero $x_1<x_2$ nos llevan a contradicción análogamente a lo anterior

por tanto tiene que existir $c \in (a,b)$ con $f''(c)=0$.

2.- Dibuja la gráfica de la función: $f(x) = x\ln(x^2)-x^2$; indicando asíntotas, máximos y mínimos relativos y absolutos; zonas de crecimiento y convexidad.

- Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$. Aquí f es continua.
- Límites: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln x^2 - x^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(x^2)-x^2 = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\dfrac{\ln x^2}{x}-1\right) = -\infty$

ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^2}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{1} = 0$

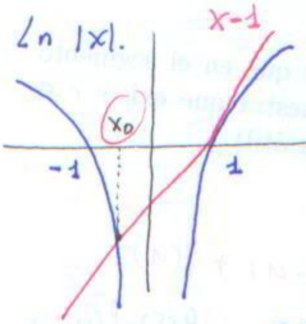
$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2 - x^2 = 0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{\frac{1}{x^2}}\, 2x}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}} = 0$

- Signo de f: $f(x) = x(\ln x^2 - x)$ $\begin{cases} >0 & \text{si } x \sim 0^- \\ <0 & \text{si } x \sim 0^+ \end{cases}$

- DERIVADA $f'(x) = \ln x^2 + x\,\frac{2x}{x^2} - 2x =$

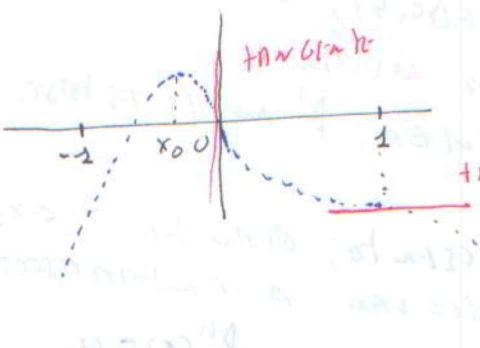
$$= \ln x^2 - 2x + 2 = 2\left[\ln|x| + 1 - x\right] = 2\left[\ln|x| - (x-1)\right]$$



$$f'(x)\begin{cases} >0 & \text{si } x < x_0 \\ <0 & \text{si } x \in (x_0, 1) \\ <0 & \text{si } x > 0 \\ =0 & \text{si } x = 1 \text{ ó } x = x_0 \end{cases}$$

- CRECIMIENTO: como f crece en $(-\infty, x_0)$ y decrece en $(x_0, 0)$, f tiene un máximo local en $x = x_0$; como f decrece en $x > x_0$, $x = 1$ no es ni máximo ni mínimo local.

- $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$; tendrá una tangente vertical (con pendiente $-\infty$), en $x = 0$.



- DERIVADA SEGUNDA

$$f''(x) = 2\left[\frac{1}{|x|} - 1\right]$$

$\boxed{\text{Si } x > 0}$

$$f''(x)\begin{cases} >0 & \text{si } x \in (0,1) \\ =0 & \text{si } x = 1 \\ <0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Así f es convexa en $(0,1)$, f es cóncava en $(1,\infty)$; $x = 1$ es un punto de inflexión.

$\boxed{\text{Si } x > 0}$

$$f''(x) = 2\left[\frac{1}{x} - 1\right] < 0 \quad \forall x < 0$$

luego f es cóncava en $(-\infty, 0)$.