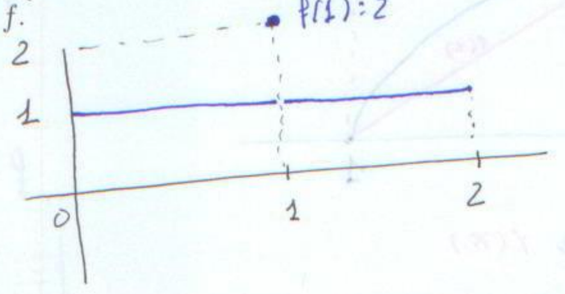
AVR PRÁCTICA-8

Nombre y apellidos..

1.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,2]\setminus\{1\} \\ 2 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$

1_1.- Dibuja la gráfica de f.



1_2.- Cálcula el área del rectángulo $[0,2]\times[0,1]$.

AREA $2 \times 1 = 2$.

1_3.- Para cada $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, se considera la partición del intevalo $[0,2]$

$$P_k = \{0, 1-\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}, 2\}.$$

Se define

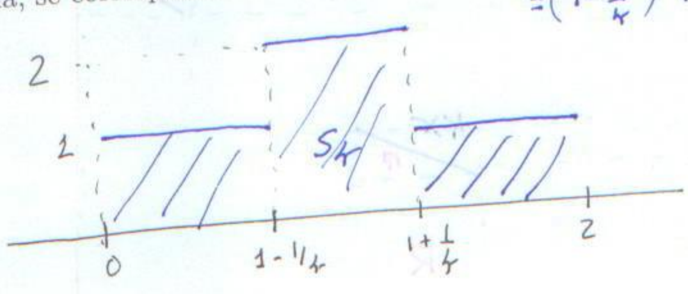
$$S_k = 1 \times ((1-\frac{1}{k}) - 0) + 2 \times ((1+\frac{1}{k}) - (1-\frac{1}{k})) + 1 \times (2 - (1+\frac{1}{k})) =$$

¿Que área, dibujala, se corresponde al valor de S_k?

$= (1-\frac{1}{k}) + 2\,\frac{2}{k} + (1-\frac{1}{k}) =$

$= 2\left[1-\frac{1}{k} + \frac{2}{k}\right] =$

$= 2\left[1-\frac{3}{k}\right]$



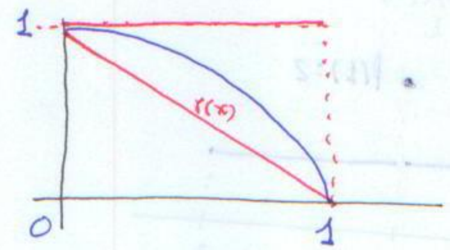
1_4.- Cálcula $\lim_{k\to\infty} S_k$

$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} 2\left[1-\frac{3}{k}\right] = 2$

1_5.- ¿Coinciden los resultados de 1_2.- y 1_4.- SÍ, EL ÁREA DEL RECTÁNGULO [illegible] COINCIDE CON EL LÍMITE $\lim_{k\to\infty} S_k$

2.-Prueba que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \leq 1.$

(**Indicación:** no intentes calcular la integral; dibuja la gráfica de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.)



$1 \geq f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad x \in [0,1]$

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} < 0 \quad \forall x \in [0,1]$

f DECRECIENTE

$f''(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2} + x\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = -\frac{\sqrt{1-x} + \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} < 0$

f CONCAVA

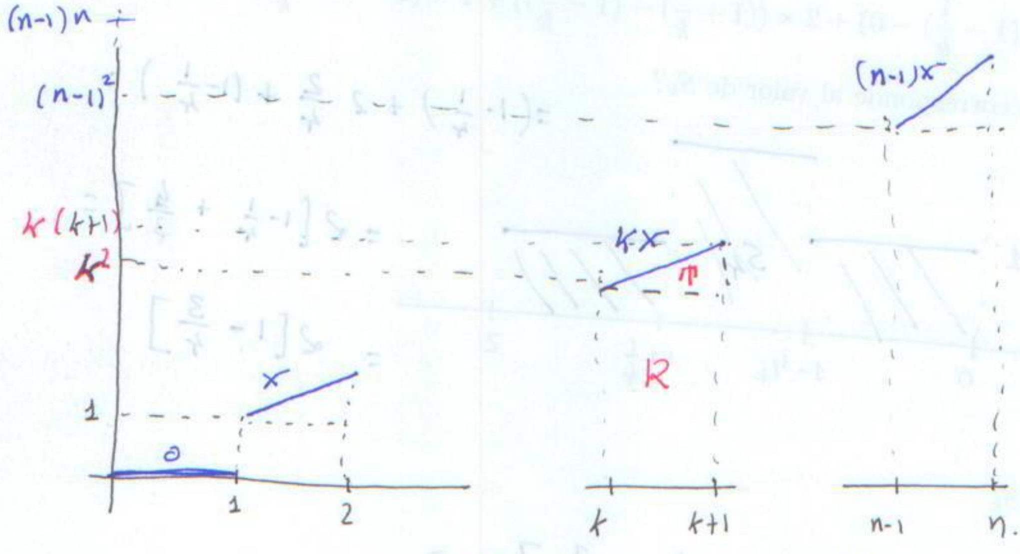
$1 \geq \sqrt{1-x^2} \geq r(x)$

FUNCIÓN CONCAVA

POR TANTO EL ÁREA $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ESTÁ COMPRENDIDA ENTRE 1 (ÁREA CUADRADO) y 1/2 (ÁREA DEL TRIÁNGULO)

3.- Si $[x]$ representa la parte entera del número x, cálcula $I_n = \int_1^n x[x]dx$

(**Indicación:** no intentes calcular la integral; dibuja la gráfica de $f(x) = x[x]$. Mide áreas y utiliza el problema 1.3. de la primera parte.)



$$I_n = \int_1^n x[x]\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} kx\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{1 \cdot k^2}_{R} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(k(k+1)-k^2\right)}_{T} =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^2 + \frac{1}{2}k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k =$$

SUMA DE LOS n-1 PRIMEROS NÚMEROS

SUMA DE LOS n-1 PRIMEROS CUADRADOS

$$= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{n(n-1)}{4} =$$

$$= (n-1)n\left[\frac{2n-1}{6} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{24}(n-1)n\left[8n+2\right] = \frac{1}{12}(n-1)n(4n+1).$$