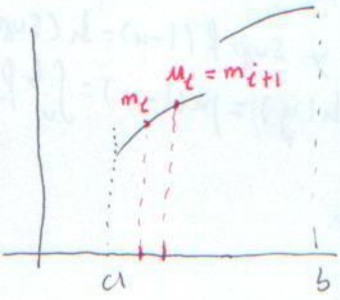
AVR PRÁCTICA-9

Nombre y apellidos...

1.- Demuestra que una función monótona definida sobre $[a, b]$ es integrable Riemann. (**Indicación:** Usa el Criterio de Integrabilidad de Riemann).

SEA $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ ES MONÓTONA CRECIENTE.



SEA $P_n = \{a,\ a + \frac{b-a}{n},\ \dots,\ i\frac{b-a}{n},\ \dots\ b\}$ UNA PARTICIÓN EN n PARTES IGUALES

$$S(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) \frac{b-a}{n}$$

$$I(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \frac{b-a}{n}$$

AHORA $S(f,P_n) - I(f,P_n) = \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\right] =$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\cancel{f(t_1)} + \cancel{f(t_2)} + \cancel{\dots} + f(b) - f(a) - \cancel{f(t_1)} - \dots - \cancel{f(t_{n-1})}\right]$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

LUEGO POR EL CRITERIO DE INTEGRABILIDAD DE RIEMANN, f ES INTEGRABLE.

EL CASO f MONÓTONA DECRECIENTE SE HACE DE FORMA ANÁLOGA.

2.- Calcula los siguientes límites como integrales de ciertas funciones:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}$ $\qquad = f(x) = \frac{1}{1+x}$, f CONTINUA

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.$$

$f = \frac{1}{1+x^2}$
CONTINUA EN $[0,1]$

3.- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada e integrable. Prueba que: existe μ con $\inf f \le \mu \le \sup f$ de modo que

$$\int_a^b f = \mu(b-a).$$

$$\inf f \le f(x) \le \sup f \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b \inf f \le \int_a^b f \le \int_a^b \sup f$$

$$\iff \inf f\,(b-a) \le \int_a^b f \le \sup f\,(b-a)$$, f INTEGRABLE

SABEMOS QUE EXISTE $\int_a^b f$, SEA $h(x)=x(b-a)$, CONTINUA EN $x\in[\inf f, \sup f]$, COMO $\inf f\,(b-a)=h(\inf f)$ y $\sup f\,(b-a)=h(\sup f)$ POR EL TEOREMA DE BOLZANO $\exists \mu$ TAL QUE $h(\mu)=\mu(b-a)=\int_a^b f$.

4.-a) Encuentra una función f no integrable tal que $|f|$ sea integrable.
b) Halla dos funciones f y g integrables tales que $g\circ f$ no sea integrable.

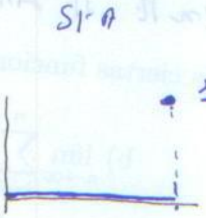
a) SEA $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\\ -1 & \text{si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\end{cases}$

CLARAMENTE $S(f,P)=1$ y $I(f,P)=-1$, PARA TODA PARTICIÓN P, LUEGO f NO ES INTEGRABLE.

$$|f|\equiv 1 \quad y \quad \int_0^1 1 = 1.$$

b) EJEMPLO SEA $g(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\ge 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$

EN $[0,1]$



$$\int_0^1 g \equiv 0.$$

SEA $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\\ 1-1/q & \text{si } x=p/q \text{ IRREDUCIBLE}\end{cases}$

CLARAMENTE $S(f,P)=1\ \forall P$ PARTICIÓN

SEA $\varepsilon>0$ Y SEA $q\in\mathbb{N}$ CON $\frac{1}{q}<\varepsilon/2$

SEA $A=\{\frac{p}{r} : \frac{p}{r}$ IRREDUCIBLE CON $r<q\}$ SEA $|A|$ CARDINAL DE A

SEA P_n PARTICIÓN EN n-PARTES IGUALES CON $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2|A|}$

ASÍ $$I(f,P_n)\ge \sum_{\{i:[i\frac{b-a}{n},(i+1)\frac{b-a}{n}]\cap A=\emptyset\}} \frac{1}{n}\cdot(1-1/q) + \sum \frac{1}{n}\times 0 \ge \left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{|A|}{n}\right)\ge$$ RESTO

$\ge(1-\varepsilon/2)(1-\varepsilon/2)$ LUEGO $S(f,P_n)-I(f,P_n)\le 1-\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 =$
$= \varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}\le\varepsilon$ LUEGO f ES INTEGRABLE.

$g\circ f=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ NO INTEGRABLE.