ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

PUNTOS CRÍTICOS.

El signo de la derivada y de la derivada segunda de una función nos da información de la misma. También lo hacen los puntos donde estas derivadas se anulan.

Definición. 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable.*

a: *Se dice que un punto $x_0 \in Domf$ es un **punto crítico** de f si $f'(x_0) = 0$.*

b: *Dado un punto $x_0 \in Domf$ se dice que es un **punto de inflexión** de f si existe $\delta > 0$ de modo que*

$$f \quad \text{es convexa en} \quad (x_0 - \delta, x_0)$$

y

$$f \quad \text{es cóncava en} \quad (x_0, x_0 + \delta)$$

o diceversa.

Observación. 1.
- *Los puntos críticos de una función son candidatos a máximos o mínimos relativos de la función, y por tanto puntos donde puede cambiar el crecimiento de la función.*
- *Los candidatos a puntos de inflexión son los puntos críticos de la función derivada (es decir, si existe f'', los puntos x_0 para los cuáles $f''(x_0) = 0$).*

Teorema. 1. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y supongamos que existe f'' en (a,b).*

a:
- *Sea $x_0 \in (a, b)$ con $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local.*
- *Sea $x_0 \in (a, b)$ con $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local.*

b: *Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto de inflexión de f, entonces $f''(x_0) = 0$.*

Demostración: **a**) El signo de la derivada segunda hace referencia a la forma de la gráfica y de ella podemos deducir si el punto crítico x_0 es un máximo o un mínimo.

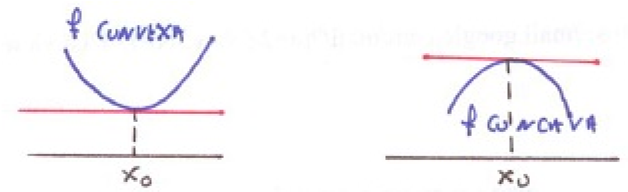

FIGURA 1. Demostración sin palabras.

La demostración rigurosa la veremos en el Tema de Aproximación Polinómica.

Ahora si pedimos un poco más, que exista f'' y que sea continua, entonces en el caso de que $f''(x_0) > 0$, se sigue que $f'' > 0$ en un entorno de x_0, pongamos $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Allí f' es creciente y por tanto para $x_1 \in (x_0-\delta, x_0)$ y $x_2 \in (x_0, x_0+\delta)$ se tiene que

$$f'(x_1) \leq f'(x_0) = 0 \leq f'(x_2).$$

Luego f es decreciente en $(x_0-\delta, x_0)$ y creciente en $(x_0, x_0+\delta)$. Así x_0 es un mínimo local.

b) f' es continua ya que existe f''.

Si f es convexa en $(x_0-\delta, x_0)$, entonces f' es creciente y como es continua $\sup\{f'(x) \ : \ x \in (x_0-\delta, x_0)\} = f'(x_0)$.

Si f es cóncava en $(x_0, x_0+\delta)$, entonces f' es decreciente y como es continua $\sup\{f'(x) \ : \ x \in (x_0, x_0+\delta)\} = f'(x_0)$

Así f' tiene un máximo local en x_0; como existe $f''(x_0)$ necesariamente $f''(x_0) = 0$.

El argumento es el mismo si f es cóncava en $(x_0-\delta, x_0)$ y convexa en $(x_0, x_0+\delta)$

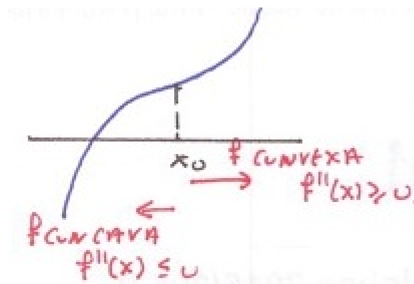

FIGURA 2. Punto de inflexión.

□

El Teorema anterior es útil para localizar puntos de inflexión. La derivada segunda no es muy determinante sin embargo para determinar en la práctica los extremos locales. Es más rápido y fácil determinar el signo de f'.

Ejemplo. 1. *Consideramos la función $f(x) = x^3$. ¿Qué ocurre en $x = 0$?*

Demostración: $f'(x) = 3x^2$. Luego en $x = 0$ tenemos un punto crítico. Como $f' > 0$, la función siempre crece, luego $x = 0$ no es ni un máximo ni un mínimo. Además $f''(x) = 6x$. Asi $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y por tanto f es cóncava en $(-\infty, 0)$. Como $f''(x) > 0$ si $x > 0$, por tanto f es convexa en $(0, \infty)$.

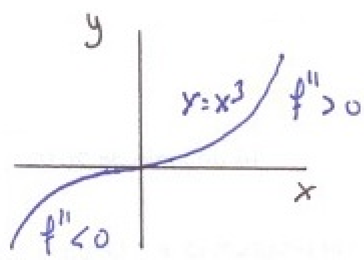

FIGURA 3. $x = 0$ punto de inflexión.

□

Ejemplo. 2. *Consideramos la función $f(x) = x^4$. ¿Qué ocurre en $x = 0$?*

Demostración: $f'(x) = 4x^3$, así $f' < 0$ si $x < 0$ y $f' > 0$ si $x > 0$. Luego f decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. Luego en el punto crítico $x = 0$ solo puede haber un mínimo.

Por otro lado $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, luego la función es convexa en toda la recta. En el punto $x = 0$, aunque $f''(0) = 0$ **no** tenemos un punto de inflexión.

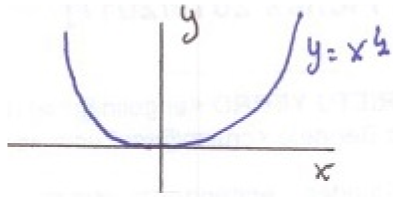

FIGURA 4. $f''(0) = 0$, pero **no** es un punto de inflexión.

$\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es