CÁLCULO DE PRIMITIVAS.

1.- Calcula las siguientes primitivas elementales.

a) $\displaystyle\int 3x dx$ b) $\displaystyle\int x^4 dx$ c) $\displaystyle\int 4x^6 + 3x^2 + 1 dx$ d) $\displaystyle\int (3x-2)^2 dx$

e) $\displaystyle\int \cos x dx$ f) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x dx$ g) $\int 3\cos x + 2\operatorname{sen} x dx$ h) $\displaystyle\int 2x\cos x^2 dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx$ j) $\int \frac{1}{x^k} dx$ con $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ k) $\int e^x dx$ l) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2-3)^4} dx$

m) $\displaystyle\int \cosh x dx$ n) $\displaystyle\int \operatorname{senh} x dx$ ñ) $\int 3\cosh x + 2\operatorname{senh} x dx$ o) $\displaystyle\int \cosh x \cosh(\operatorname{senh} x) dx$

p) $\displaystyle\int \frac{1}{x-1} dx$ q) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1} dx$ r) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1} dx$ s) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ t) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

2.- Calcula las primitivas indicadas a continuación:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ b) $\int \operatorname{sen} x \cos^4 x\, dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ d) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$ f) $\int \frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}} dx$ g) $\int \tan^2 x\, dx$ h) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

i) $\int \frac{a^x}{b^x} dx$, con $a, b > 0$ j) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ k) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$ l) $\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1} dx$

3.- Integra por partes:

a) $\int \arctan x dx$ b) $\int \ln|x| dx$ c) $\int \operatorname{arc\,sen} x dx$ d) $\int \frac{x \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

e) $\int x^2 e^x dx$ f) $\int x^3 e^{x^2} dx$ h) $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx$ i) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

j) $\int (\ln x)^3 dx$ k) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ l) $\int \sec^3 x dx$

m) $\int \cos(\ln x) dx$ n) $\int \sqrt{x} \ln x dx$ ñ) $\int x(\ln x)^2 dx$

4.- a) Calcula $\int \operatorname{arc\,sen} x dx$

b) Análogamente, prueba que si $F = \int f$, entonces

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F(\, f^{-1}(x)\,).$$

c) Usa lo anterior para calcular $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1} dx.$

5.- Demuestra las siguientes fórmulas de reducción:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$, para $n > 2$ y par.

b) $\displaystyle\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$, para $n > 2$ y par.

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$

6.- a) Calcula: $\int_0^{2\pi} dx$, $\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx$, y $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx dx$, con $n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestra que las siguientes integrales son nulas:

$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx$, $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx$, y $\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx$, para $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$ (**Indicación:** se puede hacer por partes o utilizar que:

$$\cos A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)), \qquad \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

y que

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) - \cos(A-B)).$$

c) Dada una función f continua definida sobre $[0, 2\pi]$, se definen los *coeficientes de Fourier* de f por:
$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$, y $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx$, para $n \in \mathbb{N}$.

Se llama *serie de Fourier* de f a la expresión

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$.

7.- Sea f una función continua. Demuestra que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$.

8.- Demuestra que el área de un círculo de radio r es πr^2 (Recuerda que π es por definición el área del círculo unidad).