APROXIMACIÓN POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 1: $P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2}x^2 + \frac{P'''(0)}{6}x^3 + Q(x).$

DONDE $Q(x)$ ES UN POLINOMIO CUYO TÉRMINO DE MENOR GRADO ES 4.

EL GRADO MÍNIMO DE P ES TRES, Y SERÁ PARA EL POLINOMIO $P_3(x) = 1 + \frac{x^3}{3}$.

PROBLEMA 2: LA RECTA

$$f(x) = 1 + 3(x - \pi).$$

VERIFICA QUE $f(\pi) = 1$ Y $f'(x) = 3$, ASÍ $f'(\pi) = 3$.

PROBLEMA 3: a) $f(x) = e^{e^x}$ ¿$P_{3,0}(x)$?

$f(x) = e^{e^x}$, $f(0) = e$.

$f'(x) = e^x e^{e^x}$, $f'(0) = e$.

$f''(x) = e^x e^{e^x} + e^{2x} e^{e^x}$, $f''(0) = 2e$

$f'''(x) = e^x e^{e^x} + e^{2x} e^{e^x} + 2e^{2x} e^{e^x} + e^{3x} e^{e^x}$, $f'''(0) = 5$

LUEGO $P_{3,0}(x) = e + ex + ex^2 + \frac{5e}{6}x^3$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ ¿$P_{2n,\pi/2}(x)$?

$f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(\pi/2) = 1$

$f'(x) = \cos x$, $f'(\pi/2) = 0$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(\pi/2) = -1$

$f'''(x) = -\cos x$ $f'''(\pi/2) = 0$

$f^{(IV)}(x) = \operatorname{sen} x$ $f^{(IV)}(\pi/2) = 1$

etc

ASÍ $P_{2n,\pi/2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

APROX. POR FUNCIONES POLINÓMICAS.

PROBLEMA 3: d) $f(x) = e^x$ $f^{k)}(x) = e^x$ PARA TODO $k \in \mathbb{N}$

y POR TANTO $f^{k)}(1) = e$, ASÍ

$$P_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^{n} e(x-1)^k$$

e) $f(x) = x^5 + x^3 + x$ ¿$P_{4,0}(x)$?

$$P_{4,0}(x) = x^3 + x.$$

PROBLEMA 4: $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $f'(0) = -1$

$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(0) = 2$

$f'''(x) = \frac{-3!}{(x+1)^4}$

¿ $f^{k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$? $f^{k)}(0) = (-1)^k k!$

VEAMOS LA PRUEBA POR INDUCCIÓN. PARA $k=1$ ES CIERTA

SI SUPONEMOS QUE $f^{k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$, OBSERVANDO

$$f^{k+1)}(x) = \frac{-(-1)^k k!\,(k+1)\,(x+1)^k}{(x+1)^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(x+1)^{k+1}}.$$

LUEGO $P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

OBSERVACIÓN $f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1+x-x}{x+1} = 1 - \frac{-x}{x+1} = 1 - \frac{x+x^2-x^2}{x+1} =$

$= 1 - x + \frac{x^2}{x+1} = 1 - x + \frac{x^2+x^3-x^3}{1+x} = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1+x} =$

$$= \ldots \text{etc} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k}_{P_{n,0}(x)} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}}_{R_{n,0}(x)}.$$

APROX. POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 4: b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ¿ $P_{2n,0}(x)$?

OBSERVAMOS QUE SI $g(x) = \frac{1}{1+x}$, ENTONCES

$f(x) = g(x^2)$ $\quad P_{g,n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)\, x^k$.

¿ SERÁ CIERTO QUE

$P_{f,2n,0}(x) = P_{g,n,0}(x^2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x^2)^k =$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$?

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}}{x^{2n}} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x^2) - P_{g,n,0}(x^2)}{(x^2)^n} =$$

$$\underset{\substack{x\to 0\\ x^2\to 0}}{=} \lim_{x^2\to 0} \frac{g(x^2) - P_{g,n,0}(x^2)}{(x^2)^n} = 0$$

POR SER $P_{g,n,0}$ EL POLINOMIO DE TAYLOR DE g

LUEGO $P_{f,2n,0}(x)$ ES IGUAL A f HASTA EL ORDEN $2n$ EN CERO, ASÍ ES EL POLINOMIO DE TAYLOR.

OBSERVACIÓN: $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{x^2}{x^2+1} =$

$= 1 - \frac{x^2+x^4-x^4}{x^2+1} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{x^2+1} = 1 - x^2 + \frac{x^4+x^6-x^6}{x^2+1} =$

$= 1 - x^2 + x^4 - \frac{x^6}{x^2+1} = \dots = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}}_{P_{2n,0}} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{x^2+1}}_{R_{2n,0}}$.

c) $f(x) = \cos x$, $f(\pi) = -1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f'(\pi) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f''(\pi) = 1$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f'''(\pi) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x$ $\quad f^{IV}(\pi) = -1$

etc

$P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{(2k)!}$

APROX. POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 4: d) $f(x) = \ln x$ $f(2) = \ln 2$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f^{(iv)}(x) = \frac{-3!}{x^4}$

¿ $f^{k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$? $f^{k)}(2) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k}$

LO CUÁL SE PRUEBA POR INDUCCIÓN

ASÍ $P_{n,2}(x) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k k!}(x-2)^k =$

$= \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k 2^k}(x-2)^k.$

PROBLEMA 5: a) $x^2 - 4x - 9$

$f(x) = x^2 - 4x - 9$ $f(3) = -12$ $f(x) = -12 + 2(x-3) + (x-3)^2 = P_{2,3}(x)$

$f'(x) = 2x - 4$ $f'(3) = 2$

$f''(x) = 2$ $f''(3) = 2$

UN POLINOMIO COINCIDE CON SU POLINOMIO DE TAYLOR

OBSERVACIÓN $x^2 - 4x - 9 = (x-3+3)^2 - 4(x-3+3) - 9 =$

$= (x-3)^2 + 6(x-3) + \cancel{9} - 4(x-3) - 12 - \cancel{9} =$

$= (x-3)^2 + 2(x-3) - 12.$

b) $x^5 = ((x-3)+3)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}(x-3)^k 3^{5-k}$

DESARROLLO DEL BINOMIO

c) $f(x) = x^2 + bx + c$ $f(3) = 9 + 3b + c$

$f'(x) = 2x + b$ $f'(3) = 6 + b$ LUEGO

$f''(x) = 2$ $f''(3) = 2$

$f(x) = (9+3b+c) + (6+b)(x-3) + (x-3)^2.$

APROX POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 6: a) $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{+2\cos x \operatorname{sen} x}{\cos^4 x} = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = \dfrac{2\cos^4 x + 6\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} = \dfrac{2\cos^2 x + 6\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} = \dfrac{2 + 4\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}$ $\qquad f'''(0) = 2$

$f^{(IV)}(x) = \dfrac{8\operatorname{sen} x \cos^5 x + (2+4\operatorname{sen}^2 x)4\cos^3 x \operatorname{sen} x}{\cos^8 x} =$

$= \dfrac{8\operatorname{sen} x \cos^2 x + 8\operatorname{sen} x + 16\operatorname{sen}^3 x}{\cos^5 x} = \dfrac{8\operatorname{sen} x(\cos^2 x + 8\operatorname{sen}^2 x) + 8\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} =$

$= \dfrac{8\operatorname{sen} x(1 + 7\operatorname{sen}^2 x) + 8\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} = \dfrac{16\operatorname{sen} x + 56\operatorname{sen}^3 x}{\cos^5 x}$ $\qquad f^{(IV)}(0) = 0.$

$f^{(V)}(x) = \dfrac{(16\cos x + 112\operatorname{sen} x\cos x)\cos^5 x + (16\operatorname{sen} x + 56\operatorname{sen}^3 x)5\cos^4 x \operatorname{sen} x}{\cos^{10} x} =$

$= \dfrac{16\cos^2 x + 112\operatorname{sen} x\cos^2 x + 80\operatorname{sen}^2 x + 280\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x} =$

$= \dfrac{16 + 64\operatorname{sen}^2 x + 112\operatorname{sen} x\cos^2 x + 280\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}$ $\qquad f^{(V)}(0) = 16$

ASÍ $P_{5,0}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$

d) $f(x) = \ln(\cos x)$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x = \underset{\text{PARTE a)}}{-P_{5,0}(x)} - R_{5,0}(x)$

INTEGRANDO

$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = -\int_0^x t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5\,dt - \int_0^x R_{5,0}(t)\,dt =$

$= \underbrace{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{75}}_{P_{f,6,0}(x)\ \text{EL POLINOMIO BUSCADO}} - \int_0^x R_{5,0}(t)\,dt$

APROX POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 7:) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-x^2-x+1}}$ $\quad f(2) = \sqrt{\dfrac{3}{8-4-2+1}} = 1$

COMO $x^3-2x^2-15x-24$ PARA $x=2$ VALE $-30-24 \neq 1$

LA RESPUESTA c) NO PUEDE SER

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^3-x^2-x+1}} = \sqrt{\frac{x+1}{(x-1)(x^2-1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{(x-1)^2(x+1)}} = \frac{1}{|x-1|} =$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-x+1 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2-1 \\ \quad -x+1 & \end{array}$$

$$= \frac{1}{x-1}$$

$x > 1$

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ $\quad f'(2) = -1$ $\quad$ LUEGO LAS RESPUESTAS b) y d)

TAMPOCO SON LAS CORRECTAS YA QUE EN AMBOS CASOS SUS DERIVADAS EN $x=2$ SON 1.

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$ $\quad f''(2) = 2$

$f'''(x) = \dfrac{-6}{(x-1)^4}$ $\quad f'''(2) = -6$

a) $g(x) = -x^3+7x^2-17x+15$ $\quad g(2) = -8+28-34+15 = 1$

$g'(x) = -3x^2+14x-17$ $\quad g'(2) = -1$

$g''(x) = -6x+14$ $\quad g''(2) = 2$

$g'''(x) = -6$ $\quad g'''(2) = -6.$

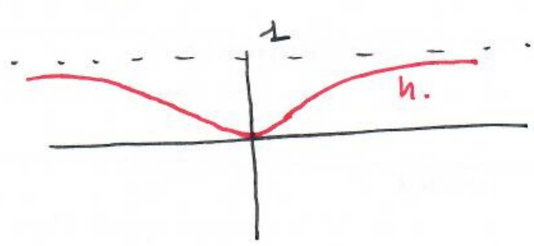
LUEGO HEMOS COMPROBADO QUE a) ES LA RESPUESTA CORRECTA.

PROBLEMA 8:) $h(x) = e^{-1/x^2}$ $\; x \neq 0, \; h(0) = 0$

$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$

h ES PAR

$\lim_{x\to \pm\infty} e^{-1/x^2} = 1$



APROX. POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 8: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^n}}{e^{1/x^2}}$$

SI $n = 2k$ PAR $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^k}{e^{1/x^2}} \underset{\substack{x\to 0 \\ y=\frac{1}{x^2}\to\infty}}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y^k}{e^y} \underset{\substack{\text{L'HOPITAL} \\ k\text{-VECES}}}{=} \dots$

$$\dots = \lim_{y\to\infty} \frac{k!}{e^y} = 0.$$

SI $n = 2k+1$ IMPAR $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^k \frac{1}{x}}{e^{1/x^2}} \underset{x\to 0,\ y=\frac{1}{x^2}\to\infty}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y^k\sqrt{y}}{e^y} =$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{y^{k+1/2}}{e^y} \underset{\substack{\text{L'HOPITAL} \\ k\text{-VECES}}}{=} \dots = \lim_{y\to\infty} \frac{A\, y^{1/2}}{e^y} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{A}{2\sqrt{y}\, e^y} = 0.$$

b) $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = P_0(x)\, e^{-1/x^2} \qquad P_0 \equiv 1$

$h'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = P_1\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \qquad P_1(y) = 2y^3$

$\vdots$

SUPONGAMOS QUE $h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ CON $P_k(y) = b_0 + b_1 y + \dots + b_{s(k)} x^{s(k)}$

$P_k'(y) = b_1 + 2b_2 y + \dots + s(k) b_{s(k)} x^{s(k)-1}$

ASÍ $h^{(k+1)}(x) = \left(P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} + P_k\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} =$

$$= \left[P_k'\left(\tfrac{1}{x}\right) + P_k\left(\tfrac{1}{x}\right) R\left(\tfrac{1}{x}\right) + P_k\left(\tfrac{1}{x}\right) P_1\left(\tfrac{1}{x}\right)\right] e^{-1/x^2} =$$

$R(y) = -y^2$

P_k', P_k, R y P_1 SON POLINÓMICAS, LUEGO SUS PRODUCTOS Y SUMAS LO SON

$$= Q\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \qquad \text{c.q.d.}$$

c) $h(0) = 0$, $h'(0) \underset{\text{DEF}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{x} \overset{a)}{=} 0$ ADEMÁS $h^{(k)}(0) \underset{\text{DEF}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h^{(k-1)}(x) - h^{(k-1)}(0)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P_{k-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right) P_{k-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \underset{a)}{=} 0$. ASÍ $P_{n,0}(x) \equiv 0$; $h(x) = 0 + R_{n,0}(x) \neq 0$, $x \neq 0$.

APROX. POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 9º $f(x) = \sqrt{1+x}$ $f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{\frac{3}{2}(1+x)^{1/2}}{4(1+x)^{6/2}} = \frac{3}{8}\frac{1}{(1+x)^{5/2}}$$

- $f(x) = P_{1,0}(x) + R_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \underbrace{\int_0^x -\frac{1}{4(1+t)^{3/2}}\frac{(x-t)}{1!}\,dt}_{\text{NEGATIVO}}$

$R_{1,0}$: FÓRMULA INTEGRAL DEL RESTO

LUEGO $f(x) \leq P_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x$.

- $f(x) = P_{2,0}(x) + R_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underbrace{\int_0^x \frac{3}{8(1+t)^{5/2}}\frac{(x-t)^2}{2!}}_{\geq 0}$

$R_{2,0}$: FÓRMULA INTEGRAL DEL RESTO

LUEGO $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq f(x)$

ASÍ TENEMOS LAS DESIGUALDADES

$$\boxed{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} \quad \forall x > 0}$$

AHORA $\sqrt{1,2} = \sqrt{1+0,2}$ y

$$\underbrace{1 + \frac{0,2}{2} - \frac{(0,2)^2}{8}}_{=} < \sqrt{1,2} < 1 + \frac{0,2}{2}$$

$$1 + 0,1 - \frac{0,04}{8} =$$

$$= 1 + 0,1 - 0,005 = 1,085 < \sqrt{1,2} < 1,1.$$

POR TANTO TENEMOS UN ERROR DE $\pm\, 0,005$.

AHORA $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$ y $\underbrace{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} \leq \sqrt{2} \leq 1 + \frac{1}{2}$

$$1 + \frac{3}{8} \leq \sqrt{2} \leq 1 + 1/2$$

POR TANTO TENEMOS UN ERROR DE $\pm\, |1/2 - \frac{3}{8}| = \frac{1}{8} = 0,125$

APROX POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 9º) AHORA SI $x \in [-0{,}2,\ 0{,}2]$

$$f(x) = P_{2,0}(x) + R_{2,0}(x) \underset{\text{TEOREMA DE TAYLOR}}{=}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \int_0^x \frac{3}{16}\,\frac{(x-t)^2}{(1+t)^{5/2}}\,dt$$

ES ASÍ EL ERROR DE TOMAR $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ EN LUGAR DE $\sqrt{1+x}$ PARA $[-0{,}2,\ 0{,}2]$

$$|f(x) - P_{2,0}(x)| = \left| \int_0^x \frac{3}{16}\,\frac{(x-t)^2}{(1+t)^{5/2}}\,dt \right|$$

ESTE ERROR SE PUEDE ACOTAR POR

$$|R_{2,0}(x)| \underset{x\in[0,\ 0{,}2]}{\le} \int_0^x \left| \frac{3}{16}\,\frac{(x-t)^2}{(1+t)^{5/2}} \right| dt \underset{1+t>1}{\le} \frac{3}{16}\int_0^x (x-t)^2\,dt =$$

$$= \frac{3}{16}\left(-\frac{(x-t)^3}{3} \right|_0^x = \frac{\cancel{3}}{16}\,\frac{x^3}{\cancel{3}} \le \frac{(0{,}2)^3}{16} = \frac{1}{10^3}\,\frac{2^3}{2^4} =$$

$= 0{,}0005$ COTA DEL ...

ERROR MÁXIMO QUE SE COMETE AL TOMAR $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ EN LUGAR DE $\sqrt{1+x}$ SI $x \in [0,\ 0{,}2]$.

PROBLEMA 10º) a) $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ $\quad |x| < 1/2$

PROBLEMA ANTERIOR

b) $(\ln x)^2 \simeq (x-1)^2 - (x-1)^3$ SI $|x| < 1/2$

$f(x) = (\ln x)^2 \quad f(1) = 0$

$f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x \quad f'(1) = 0$

$f''(x) = -\frac{2}{x^2}\ln x + \frac{2}{x^2} \quad f''(1) = 2$

$f'''(x) = \frac{4}{x^3}\ln x - \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^3} \quad f'''(1) = -6$

ASÍ $P_{3,0}(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k =$

$= (x-1)^2 - (x-1)^3$

TENEMOS QUE $f(x) \simeq (x-1)^2 - (x-1)^3$ SI $|x-1| < 1/2$

QUEDA PENDIENTE ESTIMAR EL ERROR.

APROX. POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 11:] a) $\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| < \frac{1}{5040}$ si $|x|<1$

(TEORÍA)

b) $\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^k \right| < \frac{1}{10^{-4}}$ si $x \in [0, \pi/2]$

$$f(x) = \cos x$$

$$P_{2n_0,0}(x) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^k$$

$$R_{2n_0,0}(x) = \int_0^x \frac{f^{(2n_0+1)}(t)}{(2n_0)!}(x-t)^{2n_0}\,dt$$

Como $|f(x) - P_{2n_0,0}(x)| \underset{\text{TH DE TAYLOR}}{=} |R_{2n_0,0}(x)| \leq$

$$\leq \int_0^x \left| \frac{f^{(2n_0+1)}(t)}{(2n_0)!}(x-t)\right|^{2n_0} dt \leq$$

$|f^{(2n_0+1)}(t)| \leq 1$ (sen o cos)

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n_0}}{(2n_0)!}\,dt = -\frac{(x-t)^{2n_0+1}}{(2n_0+1)!}\Bigg|_0^x = \frac{x^{2n_0+1}}{(2n_0+1)!} \leq$$

$x \in [0, \pi/2]$

$$\leq \frac{\pi^{2n_0+1}}{2^{2n_0+1}(2n_0+1)!} \leq \frac{2^{2n_0+1}}{(2n_0+1)!} =$$

$\pi < 4 = 2^2$

$$\underbrace{\frac{2}{2n_0+1} \cdot \frac{2}{2n_0} \cdots}_{2n_0 \text{ factores menores que } 1} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} < \frac{1}{10^4}$$

si $n_0 \geq 12$

$$\frac{2}{24} \cdot \frac{2}{23} \cdot \frac{2}{21} \cdot \frac{2}{20} < \frac{1}{10^4}$$

ANEXO POR FUNCIONES ELEMENTALES

PROBLEMAS 12:) $f(x) = \ln(x+1)$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\text{EJERCICIO 4}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k}_{\text{POLINOMIO DE TAYLOR DE } \frac{1}{1+x}} + \underbrace{\frac{(-1)^n x^n}{1+x}}_{\text{RESTO}}$$

INTEGRANDO

$$\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt$$

LUEGO

$$\left|\ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \quad + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| =$$

$$= \left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^x \left|\frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right| dt \leq$$

$t \in [0, x]$ $\quad x \geq 0$

$\frac{1}{1+t} < 1$

$$\int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\forall x \in [0,1]$.

PROBLEMA 13:) a) sen 1 CON UN ERROR MENOR QUE 10^{-17}

DE ERROR MENOR QUE

VER TEORÍA, PARA UN VALOR 10^{-3}. PARA 10^{-17} TEÓRICAMENTE SE HACE IGUAL, PERO EN LA PRÁCTICA LOS NÚMEROS QUE QUEDAN NO SON COMPUTABLES.

d) $$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \underset{\text{T. TAYLOR}}{=} \left| \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\,dt \right| \underset{x \in [0,2]}{\leq} e^2 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq$$

$$\underset{\substack{e<3 \\ x \leq 2}}{\leq} \frac{9\, 2^{n+1}}{(n+1)!} = 9\, \frac{2}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \cdots}_{n \text{ FACTORES}} \cdot \frac{2}{3} < \frac{1}{10}$$

$n \geq 22$

$$\cancel{9}\ \frac{2}{23} \cdot \frac{2}{22} \cdot \frac{2}{21}\ \frac{2}{20} \cdots \cancel{\frac{2}{18}} \cdots$$

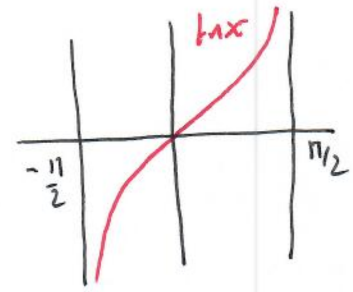
ASÍ $e^2 \simeq 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdot \quad + \frac{2^{22}}{22!}$ CON UN ERROR DE $\pm 10^{-4}$.

APROX DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

PROBLEMA 14: a) $\boxed{\tan(x+y)} = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} =$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} = \frac{\cos y \cos x\,(\tan x + \tan y)}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} =$$

$$= \boxed{\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}}$$



ASÍ

$$\tan(\operatorname{Arctn} x + \operatorname{Arctn} y) =$$

APLICANDO LA FÓRMULA DE ARRIBA

$$= \frac{x+y}{1-xy}$$

y $\tan\left(\operatorname{Arctn} \dfrac{x+y}{1-xy}\right) = \dfrac{x+y}{1-xy}$

DEDUCIMOS POR TANTO QUE

$$\operatorname{Arctn} x + \operatorname{Arctn} y = \operatorname{Arctn} \frac{x+y}{1-xy} + k\pi \quad \text{PARA } k \in \mathbb{Z}.$$

b) EN PARTICULAR SI $x = 1/2$ y $y = 1/3$, COMO $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1$

TENEMOS QUE $\operatorname{Arctn} 1 = \operatorname{Arctn} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctn} \frac{1}{3}$

LUEGO $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctn} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctn} \frac{1}{3}$

AHORA $\operatorname{Arctn} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

VER TEOREMA

ACOTAMOS EL RESTO $\left|(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| \le \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \underset{|x|\le\frac{1}{2}}{<} \dfrac{1}{(2n+3)\,2^{2n+3}}$

SI $n = 4$ $\quad \dfrac{1}{(2\cdot 4+3)\,2^{2\cdot 4+3}} = \dfrac{1}{11\cdot 2^{11}} = \dfrac{1}{22.528} < \dfrac{1}{10^{-4}}$

CUENTAS

ASÍ $\pi \simeq 4\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5} - \frac{(1/2)^7}{7} + \frac{(1/2)^9}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{(1/3)^3}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^5}{5} - \frac{(\frac{1}{3})^7}{7} + \frac{(\frac{1}{3})^9}{9}\right)\right]$

CON UN ERROR $\left|4\left(\pm \dfrac{1}{10^{-4}} \pm \dfrac{1}{10^{-4}}\right)\right| \le \dfrac{8}{10^{-4}} < \dfrac{1}{10^{-3}}.$

APROX POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 15: a) $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

VER TEORÍA

LUEGO $\operatorname{sen} x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

$$= \underbrace{x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}}_{= P_{4n+2,0}(x)\ (\bullet)} + \dots$$

YA QUE

$$\frac{\operatorname{sen} x^2 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!}\right)}{x^{4n+2}} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!}}{x^{4n+2}} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4(k-n)}}{(2k+1)!} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad (\bullet\bullet)$$

($\bullet$) LA CARACTERIZACIÓN DEL POLINOMIO DE TAYLOR COMO EL POLINOMIO IGUAL A f HASTA EL ORDEN n NOS SIRVE PARA EN ESTE CASO DECIR QUE $P_{4n+2,0}$ ES EL POLINOMIO DE TAYLOR.

PARA ELLO NECESITAMOS QUE ($\bullet\bullet$) $\xrightarrow[x \to 0]{} 0$. ESTO ES CIERTO YA QUE PARA $x=0$, LA EXPRESIÓN SE ANULA Y COMO VEREMOS $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4(k-n)}}{(2k+1)!}$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA.

b) SI $P_{4n+2,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!}$ TENEMOS QUE PARA $j \neq 4k+2$ $f^{j)}(0) = 0$

PARA $j = 4k+2$ $f^{j)}(0) = (4k+2)!(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}$

c) $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(0)}{k!} x^k$, ASÍ $f(x) = g(x^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(0)}{k!} x^{nk} =$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{j)}(0)}{j!} x^j$$

SI $j \neq nk$ $f^{j)}(0) = 0$, SI $j = nk$ $f^{j)}(0) = j! \frac{g^{k)}(0)}{k!} = j! \frac{g^{j/n)}(0)}{(j/n)!}$

APROX POR FUNCIONES POLINÓMICAS

PROBLEMA 16: $f(x) = \cos x$ $\quad f(0)=1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \quad f'(0)=0$

$f''(x) = -\cos x \quad f''(0) = -1$

LUEGO $f(x) = P_{2,0}(x) + R_{2,0}(x)$, EN ESTE CASO

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_{2,0}(x)$

ERROR $\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| = \left| \int_0^x \frac{\cos''' t}{2!}(x-t)^2 dt \right|$

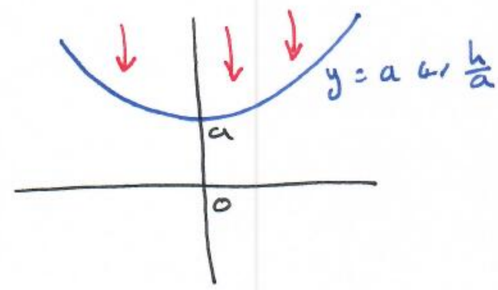
TEOREMA DE TAYLOR

$|R_{2,0}(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} dt = \frac{x^3}{6}$

SI $0 \leq x \leq 1/2 \Rightarrow \frac{x^3}{6} \leq \frac{1}{2^3}\frac{1}{6} = \frac{1}{8\times 6} = \frac{1}{48} < \frac{1}{40} = 0{,}025$

SI $0 \leq x \leq 0{,}1 \Rightarrow \frac{(0{,}1)^3}{6} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{6} < 0{,}001.$

PROBLEMA 17: $y = a \cosh \frac{x}{a}$



$y(x) = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \quad y(0) = a.$

$y'(x) = a \frac{1}{a} \operatorname{senh} \frac{x}{a} \quad y'(0) = 0$

$y''(x) = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a} \quad y''(0) = 1/a.$

LUEGO $P_{2,0}(x) = a + \frac{1}{2a} x^2$ ES UNA PARÁBOLA

ASÍ $a \cosh \frac{x}{a} \simeq a + \frac{1}{2a} x^2$ PARA $|x| \simeq 0.$