APROXIMACIÓN POR FUNCIONES POLINÓMICAS.

1.- Escribe todos los polinomios P tales que $P(0) = 1$, $P'(0) = P''(0) = 0$ y $P'''(0) = 2$ ¿Cual es el de grado mínimo?

2.- Da un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en todo $\mathbb{R}$ y tal que $f(\pi) = 1$ y $f'(\pi) = 3$.

3.- Halla los polinomios de Taylor, del grado indicado y en el punto indicado, de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{e^x}$, grado 3 en 0.

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, grado 3 en 0.

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, grado $2n$ en $\pi/2$.

d) $f(x) = e^x$, grado n en 1.

e) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grado 4 en 0.

4.- Halla los polinomios de Taylor (del grado indicado y en el punto indicado) para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, grado n en 0.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, grado $2n$ en 0.

c) $f(x) = \cos x$, grado $2n$ en π.

d) $f(x) = \ln x$, grado n en 2.

5.- Escribe los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x - 3)$:

a) $x^2 - 4x - 9$ b) x^5 c) $x^2 + bx + c$.

6.- Escribe los tres primeros términos diferentes de cero de los desarrollos en series de Taylor en $x = 0$ de las siguientes funciones:

a) $\tan x$ a) $\sec x$ c) $\tanh x$ d) $\ln(\cos x)$ 2) $e^x \operatorname{sen} x$.

7.- Sea $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^3-x^2-x+1}}$, $x > 1$; el polinomio de Taylor de f de orden 3 centrado en 2 es:

a) $-x^3 + 7x^2 - 17x + 15$ b) $(x-2)^3 - 2(x-2)^2 + (x-2) + 1$

c) $x^3 - 2x^2 - 15x - 29$ d) $\frac{1}{6}(x-2)^3 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + (x-2) + 1$.

8.- Se considera la función $h(x) = e^{-1/x^2}$, si $x \neq 0$ y $h(0) = 0$.

a) Demuestra por inducción que $\lim_{x\to 0} h(x)/x^n = 0$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

b) Prueba por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un polinomio P_n de modo que $h^{n)}(x) = P_n(1/x)h(x)$, si $x \neq 0$.

c) Deduce que $h^{n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, comprueba que el resto $R_{h,n,0}(x)$ no converge a cero cuando $n \to \infty$ para $x \neq 0$.

9.-a) Prueba la siguiente desigualdad:

$$|\operatorname{sen} x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})| < \frac{1}{5040} \qquad \text{para todo} \quad |x| \leq 1.$$

b) Encuentra n_0 tal que $|\cos x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^k| < \frac{1}{10^{-4}}$ para todo $x \in [0, \pi/2]$.

10.- Si $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, prueba que

$$|\ln(x+1) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n})| < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

11.- Prueba que si $x > 0$, entonces

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Utiliza la desigualdad anterior para aproximar $\sqrt{1,2}$ y $\sqrt{2}$; y da una estimación del error cometido. Utiliza el polinomio de Taylor para $n = 2$ para obtener una aproximación más precisa de $\sqrt{1,2}$ y de $\sqrt{2}$.

12.- Calcula los siguientes números con un error menor al indicado:

a) $\operatorname{sen} 1$, error menor a 10^{-17} b) $\operatorname{sen}(1/2)$, error menor a 10^{-20}

c) e, error menor a 10^{-4} d) e^2, error menor a 10^{-5}

e) e^{10}, error menor a 10^{-30} f) $\arctan(1/10)$, error menor a $10^{-(10)^{10}}$.

13.- a) Demuestra que si $\arctan x$, $\arctan y$ e $\arctan x + \arctan y$ son distintos de $k\pi + \frac{\pi}{2}$, entonces se verifica que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) + c, \qquad \text{donde} \qquad c = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Comprueba que $\frac{\pi}{4} = \arctan 1/2 + \arctan 1/3$. Usando esto, comprueba que

$$\pi = 3,14159.........$$

14.- a) Demuestra que el polinomio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ de grado $4n+2$ en 0 es:

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - ..... + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

b) Halla $f^{k)}(0)$ para todo k.

c) En general, si $f(x) = g(x^n)$, halla $f^{k)}(0)$ en términos de las derivadas de g en 0 (Se puede suponer que las funciones son iguales a sus series de Taylor) .

15.- Determina el origen de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ si $|x| < 1/2$.

b) $(\ln x)^2 \simeq (x-1)^2 - (x-1)^3$ si $|x-1| < 1/2$.

16.- Para que valores de x la fórmula $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$ da un error no mayor de $0,01$; o de $0,001$ o de $0,0001$.

17.- Un hilo pesado, bajo la acción de la gravedad, se comba formando la catenaria $y = a\cosh\frac{x}{a}$. Demuestra que, para valores pequeños de $|x|$, la forma que toma el hilo puede ser representada por la parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.