SUCESIONES DE FUNCIONES.

1.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

a) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq 1/n \\ -nx+1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$

b) $f_n(x) = x - x^n$ para $x \in [0,1]$

c) $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$ para $x \in [1,\infty)$

d) $f_n(x) = (1-x)^n$ para $x \in [0,1]$

e) $f_n(x) = \dfrac{1+x\ln n}{1+xn}$ para $x \in [0,\infty)$

f) $f_n(x) = (\cos \pi x)^{2n}$ para $x \in \mathbb{R}$

2.- a) Sea $f_n(x) = xe^{-nx}$ para $x \geq 0$. Comprueba que esta sucesión converge uniformemente en $[0,\infty)$.

b) Sea $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{1+nx}$ para $x \geq 0$. Comprueba que para todo $a > 0$ la sucesión anterior converge uniformemente en $[a,\infty)$, pero no lo hace en $[0,\infty)$.

c) Sea $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ para $x \geq 0$. Comprueba que para todo $a > 0$ la sucesión anterior converge uniformemente en $[a,\infty)$, pero no lo hace en $[0,a)$.

3.- Comprueba que la sucesión $\frac{x^n}{1+x^n}$ no converge uniformemente en el intervalo $[0,2]$.

4.- Construye un ejemplo de una sucesión de funciones sobre el intervalo $[0,1]$ de modo que cada una de las funciones sea discontinua en cualquier punto de $[0,1]$ y que la sucesión converga uniformemente en $[0,1]$ a una función continua en todo el intervalo.

5.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$. Se considera la sucesión de funciones

$$f_n(x) = f(x + \frac{1}{n}) \qquad \text{para cada} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Prueba que $(f_n)_n$ converge uniformemente a f en todo $\mathbb{R}$.

6.- Sean $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^2xe^{-nx^2}$ para $n \in \mathbb{N}$.

a) Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $(f_n)_n$ en $[0,1]$.

b) Si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, estudia la validez de las siguientes expresiones:

1) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$.

2) $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 1} f_n(x)) = \lim_{x\to 1} f(x)$.

3) $f'(1/2) = \lim_{n\to\infty} f_n'(1/2)$.

7.- Sea $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ una enumeración de los números racionales del intervalo $[0,1]$, es decir

$$\begin{array}{rcccc} R & : & \mathbb{N} & \to & [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ & & n & \to & r_n \end{array}$$

donde R es una biyección. Se considera la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = r_1, ..., r_n. \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \backslash \{r_1, ..., r_n\} \end{cases}.$$

Comprueba que cada f_n es integrable Riemann en $[0,1]$. Y que

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq ..... \leq f_n(x) \leq .....$$

Comprueba que existe

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{para cada} \quad x \in [0,1], \quad \textit{función de Dirichlet},$$

pero este límite no es integrable Riemann en $[0,1]$.

8.- Comprueba que la sucesión $(f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n)_n$ converge uniformemente a una función f en $\mathbb{R}$, la cuál es derivable en $x=1$; pero se tiene que

$$f'(1) \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

9.- Una sucesión de funciones uniformemente continuas converge uniformemente a una función f. ¿Puede ser f **no** uniformemente continua?

10.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de las series de funciones siguientes:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con $x \in [0,1]$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{(1+\operatorname{sen} x)^n}$ con $x \in [0,\pi]$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ con $x > 0$.

11.- Comprueba que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ converge uniformemente en $[0,r]$, con $r<1$. Sea f la función suma. Prueba que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1].$$

Calcula $f(x)$ si $0 \leq x < 1$ y comprueba que $f(1) = \pi/4$.

12.- Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ con $x \in \mathbb{R}$. ¿Se puede asegurar que f es derivable y que f' se obtiene derivando término a término la serie?