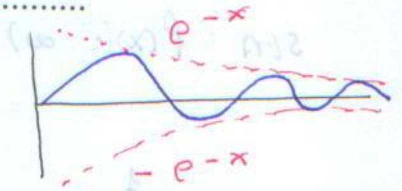
AVR PRÁCTICA-14

Nombre y apellidos...

1.- Calcula, si existen, las siguientes integrles impropias:



$\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx \underset{\text{PARTES}}{=} -e^{-x}\operatorname{sen} x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\cos x\, dx$

$\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\lim_{x\to\infty} -e^{-x}\operatorname{sen} x = 0$

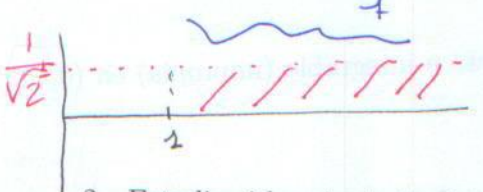
$\underset{\text{PARTES}}{=} -e^{-x}\cos x \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx = 1 - \int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx.$

DESPEJANDO $\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx = 1/2$

$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_r^1 =$

$= \lim_{r\to 0^+} -\frac{\ln^2 r}{2} = -\infty$ NO EXISTE LA INTEGRAL

$\int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - x + 1}}\, dx$ $\quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad x > 1 \quad \frac{1}{x^3} > \frac{1}{x^4}$



$\Rightarrow 0 > \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}$

$\int_1^\infty f(x)\, dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} = \infty.$

2.- Estudia si las siguientes integrales son convergentes:

$\int_0^1 x \ln x dx$ $\quad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, $\quad f(x) = x\ln x$

ES CONTINUA EN $[0,1]$, LUEGO ES INTEGRABLE RIEMANN

$\int_0^1 x\ln x\, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{x^2}{2}\ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx = 0 - \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}.$

$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\, dx$ $\quad \left|\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ y como $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x \Big|_0^\infty = \pi/2$

LUEGO POR EL CRITERIO DE COMPARACIÓN $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\right|$ ES INTEGRABLE,
LUEGO $\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$ TAMBIÉN LO ES.

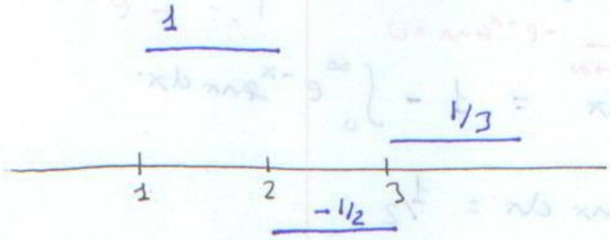
$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cos(\frac{1}{x})\, dx;$ $\quad \left|\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

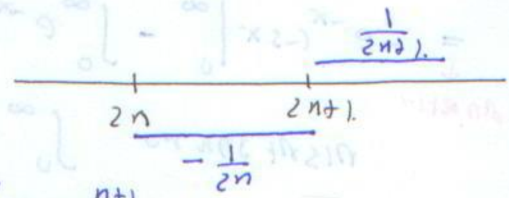
COMO $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{\sqrt{x}}{2}\Big|_0^1 = 1/2$, $\quad \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}$ ES

ABSOLUTAMENTE INTEGRABLE Y POR TANTO INTEGRABLE.

3.- Encuentra un ejemplo de una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de modo que existe $\int_a^b f(x)\,dx$, pero no exista $\int_a^b |f(x)|\,dx$

Sea $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x\in[n,n+1) \;\; n \text{ impar} \\ -\frac{1}{n} & \text{si } x\in[n,n+1] \;\; n \text{ par}\end{cases}$





$$\int_1^\infty f(x) = \lim_{N\to\infty}\int_1^N f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty.$$

SIN EMBARGO:

$$\int_1^\infty |f(x)|\,dx \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \quad \forall N\in\mathbb{N}, \text{ y } \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \infty.$$

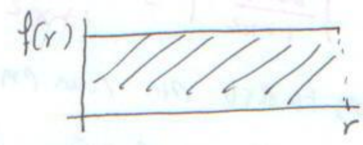
4.- Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función con $f\geq 0$, decreciente e integrable (impropia) en $(0,\infty)$. Demuestra que:

$$\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0.$$

Existe $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r f(x)\,dx \geq$ ($f\geq 0$ y decreciente)

$$\geq \lim_{r\to\infty}\int_0^r f(r)\,dx = \lim r\,f(r).$$

$f(x)\geq f(r)$ si $0\leq x\leq r$



El límite existe ¿es nulo?

Como f es integrable, el criterio de Cauchy nos dice que $0 = \lim_{x\to\infty}\int_{x/2}^{x} f(s)\,ds \geq \lim_{x\to\infty}\int_{x/2}^{x} f(x)\,dx$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}f(x)$; si $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}f(x)=0$,

entonces $\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$.