

AVR PRÁCTICA-15

Nombre y apellidos.....

1.- a) ¿ Existe $\int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx$?

b) Sea $f(x) = -x$ si $x \in [-1, 1)$. Sea $g(x) = f(x - (2k + 2))$ si $x \in [2k + 1, 2k + 3)$, para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. ¿Existe $\int_1^\infty \frac{g(x)}{\ln(1+x)} dx$?

2.- Estudia la convergencia de las series $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^3}$ y $\sum_{n=1}^\infty \frac{(\ln n)^2}{n}$.

3.- Para cada $x > 0$ se define $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$.

.- Prueba que $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ y $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ son finitas.

.- Usando la Regla de Integración por Partes, prueba que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

.- Calcula $\Gamma(1)$ y deduce que $\Gamma(n) = (n-1)!$ (Esta función se conoce con el nombre de función *gamma de Euler*).

.- Con la sustitución $u = t^x$, deduce que:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-u^{1/x}} du \quad \text{y} \quad \Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du.$$