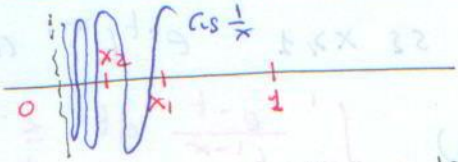
AVR PRÁCTICA-15

Nombre y apellidos..

1.- a) ¿ Existe $\int_0^1 \cos\frac{1}{x}dx$?



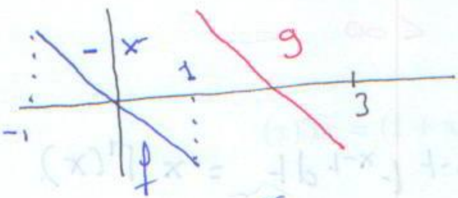
USANDO EL CRITERIO DE CAUCHY

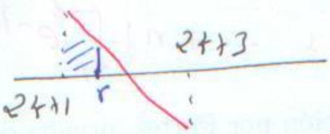
Como $\left|\int_{x_1}^{x_2} \cos\frac{1}{x}\,dx\right| \le \int_{x_1}^{x_2} \left|\cos\frac{1}{x}\right| dx \le |x_2 - x_1|$

si $\varepsilon > 0$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, $x_1, x_2 \in (0, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} \cos\frac{1}{x}\,dx\right| \le |x_1 - x_2| < \varepsilon$

Luego $\int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \cos\frac{1}{x}\,dx = 0$

b) Sea $f(x) = -x$ si $x \in [-1, 1)$. Sea $g(x) = f(x - (2k+2))$ si $x \in [2k+1, 2k+3)$, para $k = 0, 1, 2, 3.....$ ¿Existe $\int_1^\infty \frac{g(x)}{\ln(1+x)}dx$?





$$\int_{2k+1}^{2(k+j)+1} g(x) = \sum_{i=0}^{j-1} \int_{2(k+i)+1}^{2(k+i+1)+1} g(x)\,dx = 0$$

Luego $\int_1^r g(x)\,dx = \int_{2k+1}^{r} g(x)\,dx = \int_{-1}^{r-(2k+2)} -x\,dx$ y así

$r \in [2k+1, 2k+3]$ $\quad y = x - (2k+2)$, $dy = x$

$\left|\int_1^r g(x)\,dx\right| \le 1 \quad \forall r.$

Como $\frac{1}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ y es decreciente, el criterio de Dirichlet nos dice que la integral es convergente.

2.- Estudia la convergencia de las series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$.

- Sea $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$ función decreciente, positiva. Como

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3} = -\frac{1}{2(\ln x)^2}\Big|_2^\infty = \frac{1}{2(\ln 2)^2}$$

finita, el criterio de la integral nos dice que la serie $\sum \frac{1}{n(\ln n)^3}$ es convergente.

- $\sum \frac{(\ln n)^2}{n} \ge \sum \frac{1}{n}$ luego ambas series divergen. el criterio de la integral ($\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$) puedo usar el criterio

$$\int_1^\infty \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln x)^3}{3}\Big|_1^\infty = \infty.$$

3.- Para cada $x > 0$ se define $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$ $= \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$

.- Prueba que $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ y $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ son finitas.

$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$: SI $x \geq 1$ $e^{-t}t^{x-1}$ continua en $[0,1]$, existe la integral

SI $x \in (0,1)$ $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt \underset{e^{-t}\le 1}{\le} \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt < \infty$ $1-x \in (0,1)$.

$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ SI $0 < x \le 1$ $\frac{e^{-t}}{t^{1-x}}$ es continua para $t > 1$ y $\frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \le e^{-t}$.

SI $x > 1$, sea $n \in \mathbb{N}$ con $x-1 \le n$, así

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \le \int_1^\infty e^{-t}t^n dt \underset{\text{partes}}{=} -e^{-t}t^n\Big|_1^\infty + n\int_1^\infty e^{-t}t^{n-1}dt =$$

$$= \frac{1}{e} + n\int_1^\infty e^{-t}t^{n-1}dt \underset{\text{partes}}{=} \frac{1}{e} + n\frac{1}{e} + n(n-1)\int_1^\infty e^{-t}t^{n-2}dt = \dots \underset{\text{partes}}{=}$$

$$\frac{1}{e} + n\frac{1}{e} + n(n-1)\frac{1}{e} + \dots + n!\int_1^\infty e^{-t}dt < \infty$$

.- Usando la Relga de Integración por Partes, prueba que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{(x+1)-1}dt \underset{\text{partes}}{=} \underbrace{-e^{-t}t^x\Big|_0^\infty}_{0} + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x)$$

.- Calcula $\Gamma(1)$ y deduce que $\Gamma(n) = (n-1)!$ (Esta función se conoce con el nombre de función *gamma de Euler*).

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$; $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1!$

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$ AHORA POR INDUCCIÓN SI $\Gamma(n) = (n-1)!$, tendremos

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\{(n-1)!\} = n!$

.- Con la sustitución $u = t^x$, deduce que:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{1/x}}du \qquad \text{y} \qquad \Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du.$$

$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{1/x}}$

$u = t^x \Rightarrow t = \sqrt[x]{u}$

$du = x t^{x-1}dt$

ASÍ $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du.$